

Wykłady na XXX-lecie IMSM

Dlaczego lubimy funkcjonały wariacyjne o liniowym wzroście?

Piotr Rybka

Odpowiedź na tytułowe pytanie jest prosta: bo się przydają w praktyce, pomimo iż liniowy wzrost, czy przestrzeń $L^1(\Omega)$ są uważane za niewygodne skrajne przypadki.

Jeśli mówimy o użyteczności, to zaczniemy od algorytmu ROF opublikowane w pracy:

L.Rudin, S.Osher, E.Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms, *Physica D*, **60** (1992) 259-268.

Celem była rekonstrukcja obrazu (głównie jego krawędzi) z zaszumionych danych. Obraz f jest przedstawiany jako skala szarości na zbiorze Ω , u to obraz odzyskany a λ to parametr wierności. Autorzy postulują, że poszukiwane u jest rozwiązaniem zagadnienia minimalizacyjnego

$$u = \arg \min E,$$

gdzie

$$E(v) = \int_{\Omega} |\nabla v| + \frac{\lambda}{2}(f - v)^2 dx.$$

Ten algorytm doczekał się wielu publikacji: sama baza MathSciNet podaje 1041 cytowań tej pracy.

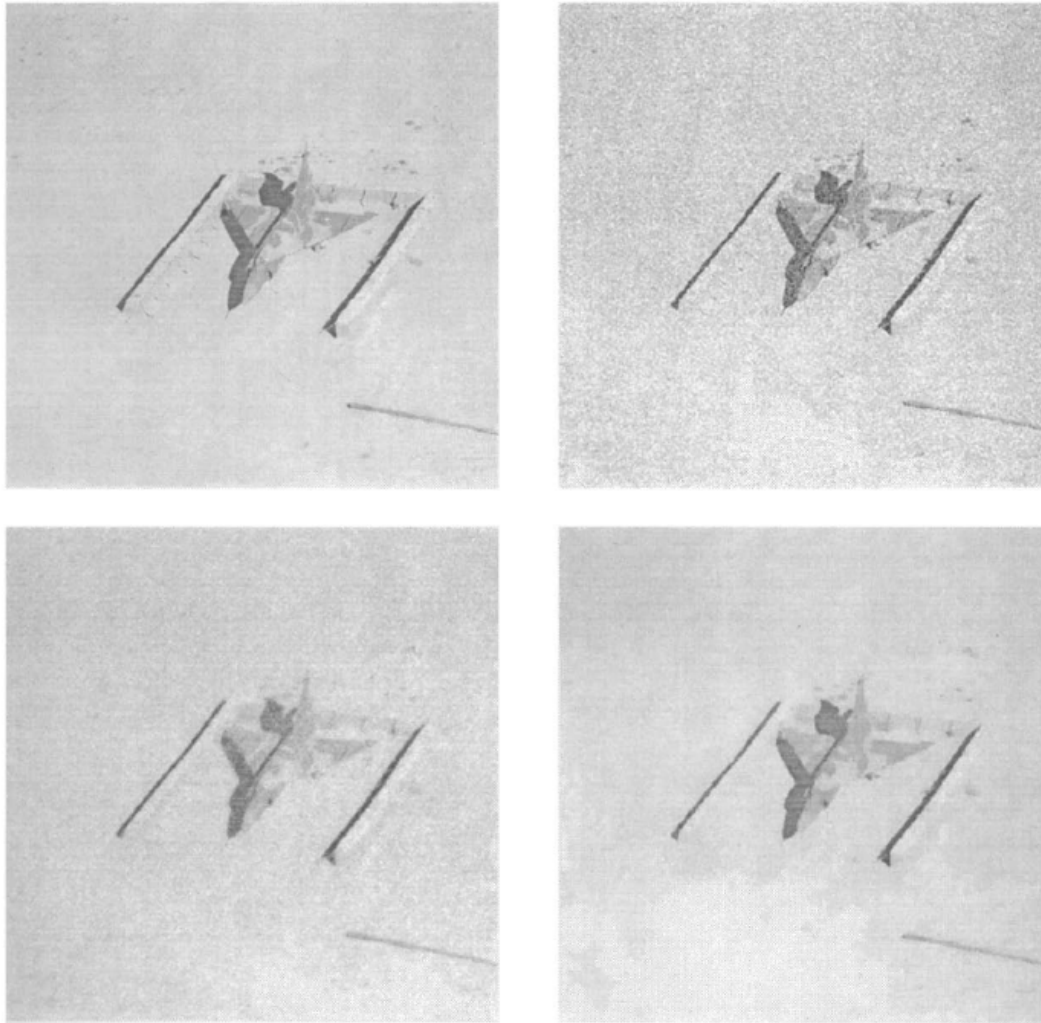


Fig. 4. (a) "Airplane". (b) Noisy "Airplane", SNR = 1.0. (c) Wiener filter reconstruction from (b). (d) TV reconstruction from (b).

Na oko E wygląda niegroźnie, wymaga aby funkcja u i jej pochodne były całkowlane, tj. $u \in W^{1,1}$, co pociąga $u \in L^2$. Jednak nie ma powodu, aby u , punkt minimalny E , był w $W^{1,1}$. Zatem należy oczekiwać, że pochodna dystrybucyjna u będzie miarą, a nawet $\int_{\Omega} |Du| < \infty$, to znaczy, że $u \in BV$.

Teraz już łatwo udowodnić:

Twierdzenie 1

Jeśli $\Omega \in \mathbb{R}^2$ jest otwarty, ograniczony i $\partial\Omega \in \text{Lip}$, $f \in L^2(\Omega)$, to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie u zagadnienia

$$E(u) = \min\{E(v) : v \in BV(\Omega)\}. \quad (1)$$

Z punktu widzenia obliczeń, dane obserwacyjne, które są ciągiem pomiarów można interpretować jako funkcje schodkowe, stałe na kwadratach (pikselach) albo można zrobić z nich dane ciągłe, np. opisane funkcjami kawałkami liniowymi.

W każdym przypadku zasadne jest pytanie o gładkość u . Sam fakt, że jest to punkt minimalny daje nam:

Stwierdzenie 2

Jeśli $\Omega \in \mathbb{R}^2$, $f \in L^2(\Omega)$, to

$$\int_{\Omega} |Du| \leq \|f\|_{L^2}^2, \quad \|u\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}.$$

Mamy też fakty ogólne:

Twierdzenie 3a (V.Caselles, A.Chambolle, M.Novaga, 2007)

Jeśli $f \in BV \cap L^\infty(\Omega)$, u jest rozwiązaniem (1), J_u , (odpow. J_f), jest zbiorem skoków u , (odpow. f), to wtedy

$$J_u \subset J_f.$$

Twierdzenie 3b (V.Caselles, A.Chambolle, M.Novaga, 2011)

Niech $N \leq 7$. Jeśli $f \in C_{loc}^\alpha(\Omega)$ a u jest rozwiązaniem (1), to $u \in C_{loc}^\alpha(\Omega)$.

To znaczy, że gładkość się propaguje, co więcej:

Twierdzenie 4 (A.Nakayasu-PR, 2017)

Jeśli $\Omega = \mathbb{T}^1$, $f \in W^{1,1}(\Omega)$, Φ jest funkcją wypukłą o liniowym wzroście,

$$F(v) = \int_{\Omega} |Dv| + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (f - v)^2 dx$$

to u jedyne rozwiązanie zagadnienia

$$F(u) = \min\{F(v) : v \in BV(\Omega)\}$$

należy do $W^{1,1}(\Omega)$.

Nie umiemy przenieść tego wyniku na większą liczbę wymiarów.

Ten wynik mówi jednak, że gładkość u , obecność krawędzi lub ich brak, będzie zależeć od REPREZENTACJI danych. Inny wynik będzie, gdy $f \in BV(\Omega) \setminus W^{1,1}(\Omega)$, a inny gdy $f \in W^{1,1}(\Omega)$.

Opowiadając o E przemilczeliśmy warunki brzegowe, to znaczy przyjęliśmy tzw. naturalne warunki brzegowe.

Twierdzenie 5

Jeśli u jest rozwiązaniem zagadnienia

$$E(u) = \min\{E(v) : v \in BV(\Omega)\},$$

to wtedy

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) &= 0 && \text{w } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Osobną kwestią jest interpretacja tego napisu.

Jak widać dość łatwo przychodzi spełnienie warunków Neumanna. Przyjrzyjmy się warunkom Dirichleta, które są „sztywniejsze“. Rozpatrzmy następujące zagadnienie,

$$\int_{\Omega} |Du| = \inf \left\{ \int_{\Omega} |Dv| : v \in BV(\Omega), Tv = f \right\}, \quad (2)$$

gdy $f \in L^1(\partial\Omega)$ jest dane. (2) jest nazywane Zagadnieniem Najmniejszego Gradientu (ZNG).

Odnotujmy znany wynik,

Twierdzenie 6 (Sternberg, Williams, Ziemer, 1992)

Jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest ściśle wypukłym (można osłabić), otwartym i ograniczonym zbiorem z gładkim brzegiem a $f \in C(\partial\Omega)$, to wtedy istnieje dokładnie jedno $u \in BV(\Omega)$ i $Tu = f$, będące rozwiązaniem (2).

Zauważmy, że $L^1(\partial\Omega)$ jest przestrzenią śladów,

$$TW^{1,1}(\Omega) = L^1(\partial\Omega) = TBV(\Omega).$$

jest więc sens pytać o rozwiązania (2), gdy $f \in L^1(\partial\Omega)$. Dodatkowo, zagadnienia minimalizowania $F_p(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx$ przy zadanych warunkach brzegowych są dobrze zbadane. Możemy więc pokusić się o przejście graniczne, gdy $p \rightarrow 1$. Spodziewamy się przy tym znaleźć postać równań Eulera-Lagrange'a, bo znamy je dla F_p i jest to p -laplasjan:

$$\operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0.$$

Mamy

Twierdzenie 7 (Mazón, Rossi, Segura de León, 2014)

1) Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ będzie otwarty i ograniczony i $\partial\Omega \in \text{Lip}$, $h \in L^1(\partial\Omega)$. Dla każdego $v \in BV(\Omega)$ następujące warunki są równoważne:

(i) v jest rozwiązaniem

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0 \quad \text{w } \Omega, \quad (3)$$

$$u = h \quad \text{na } \partial\Omega. \quad (4)$$

(ii) v jest rozwiązaniem (2).

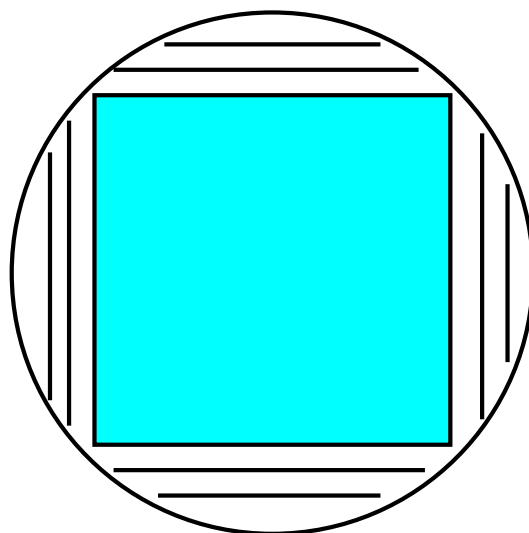
2) Dla każdego $h \in L^1(\partial\Omega)$ istnieje rozwiązanie (3).

Mamy przykłady pokazujące, że przestrzeń śladów rozwiązań zagadnienia najmniejszego gradientu jest istotnie mniejsza niż $L^1(\partial\Omega)$. Gdy dane przestają być ciągłe, to tracimy jednoznaczność.

Cechą szczególną ZNG jest to, że nie obowiązuje mocna zasada maximum, rozwiązania mogą przyjmować wartości maksymalne. Przykładowe rozwiązania.

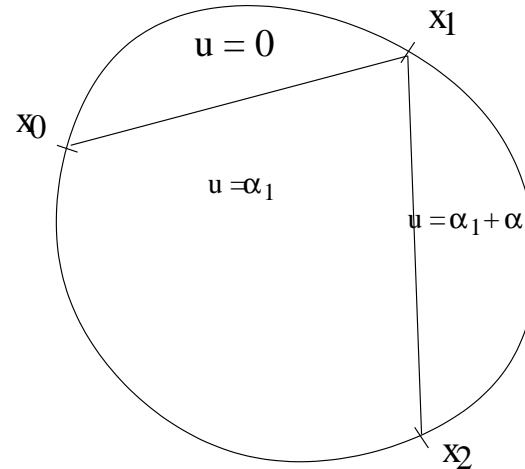
Przykład 1 (Brothers, 1984; Mazón, Rossi, Segura de León, 2014)

$$\Omega = B(0, 1), h = x^2 - y^2$$



Przykład 2 Przykład 2 (Górny, PR, Sabra, 2017)

$\Omega = B(0, 1)$, h przyjmuje wartości 0 , α_1 i $\alpha_1 + \alpha_2$.



ZNG jest równoważne następującemu zagadnieniu optymalizacji kształtu, gdy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} |p| : \operatorname{div} p = 0, p \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^2), p \cdot \nu = h \right\}$$

oraz $\frac{\partial g}{\partial \tau} = h$.

Wróćmy do ROF. Niezależnie od tego jak reprezentujemy dane, możemy iterować proces minimalizacyjny (2),

$$f_0 \mapsto u_0 =: f_1 \mapsto u_1 =: f_2 \mapsto \dots \mapsto u_n.$$

Skoro tak, to znając r-nia E-L dla ROF i zważywszy, że gdy $\lambda = 1/h$, to

$$\lambda(u - f) = \frac{u_{k+1} - u_k}{h} \approx u_t.$$

Tym samym iterowanie algorytmu ROF daje przybliżone rozwiązanie następującego zagadnienia,

$$u_t = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right), \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

To równanie można włożyć w ogólny schemat równań postaci

$$u_t = \operatorname{div} \Phi_\xi(\nabla u), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (5)$$

gdzie Φ jest funkcją wypukłą. W rozważanym przypadku $\Phi(\xi) = |\xi|$.

Mieliśmy wkład w badanie (5): seria prac z PB Muchą, gdy $N = 1$ i z PBM i Moniką Muszkietą gdy $N = 2$ przy $\Phi(\xi) = |\xi_1| + |\xi_2|$.

Twierdzenie 8 (PB Mucha, PR, 2013)

Jeśli obszarem Ω jest \mathbb{T} , $\Phi(\xi)$ jest wypukłe o liniowym wzroście, ponadto $u_0, \frac{du_0}{dx} \in BV(\mathbb{T})$, to istnieje jedyne rozwiązanie (5).

To co jest ciekawe, to obejrzenie rozwiązań tego równania dla $\Phi(\xi) = |\xi|$ i $u_0 \in C^1$. Jeśli u jest rozwiązaniem tego zagadnienia i $u_x > 0$ (odpow. $u_x < 0$) na (a, b) , to $\text{sgn } u_x$ jest stałe na (a, b) i $(\text{sgn } u_x)_x = 0$, zatem nie ma ewolucji.

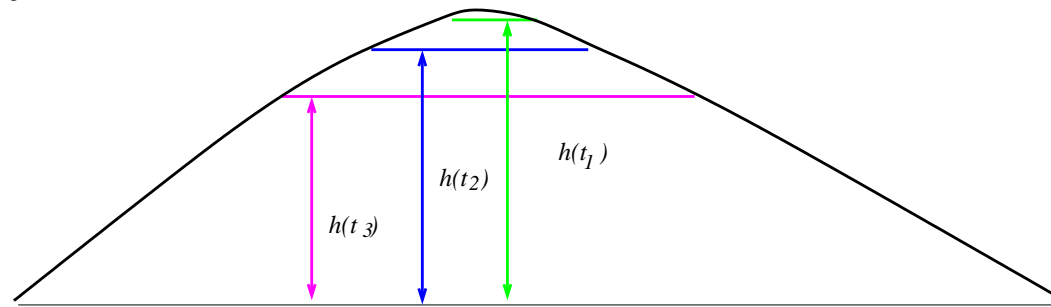
Jeśli $u_x = 0$ na (a, b) , to $\text{sgn } 0 = \xi(x)$ należy rozumieć jako selekcję wielowartościowego operatora

$$\text{sgn } p = \begin{cases} 1, & p > 0, \\ [-1, 1], & p = 0, \\ -1, & p < 0. \end{cases}$$

Mamy zatem,

$$u_t = \xi_x. \quad (6)$$

Skoro nie ma siły zewnętrznej, to ścianka $\{(x, u(x)) : x \in (a, b)\}$ porusza się ze stałą szybkością V .



Zatem całkowanie (6) daje,

$$V(b - a) = \chi \equiv \operatorname{sgn} u_x^+(b) - \operatorname{sgn} u_x^-(a) \in \{-2, 0, 2\}.$$

Położenie ścianki jest określone za pomocą RRZw na h , jej odległość od osi.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\chi}{b(h) - a(h)}, \quad (7)$$

gdzie $(a(h), h)$, $(b(h), h)$ są końcami ścianek. Skoro znamy $\operatorname{sgn} u_x^-(a(h))$ i $\operatorname{sgn} u_x^+(b(h))$, to możemy znaleźć minimalne cięcie podróżniczki $\partial E[u]$. Jest to prosta, której tangens kąta nachylenia jest prawą stroną (7). W istocie rzeczy, skonstruowaliśmy rozwiązanie półgrupowe równania (5).

Wiadomo też, że można rozwiązanie skonstruować, gdy u_0 jest zaledwie w BV .

Zadajemy sobie pytanie, czy jest prawdziwy wynik taki, jak dla zagadnienia minimalizacyjnego w algorytmie ROF. Otóż mamy,

Twierdzenie 9 (A.Nakayasu, PR, 2017)

Rozważmy

$$u_t = (\Phi_\xi(u_x))_x, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (x, t) \in \mathbb{T} \times (0, T), \quad (8)$$

gdy Φ jest funkcją wypukłą o liniowym wzroście. Jeśli $u_0 \in W^{1,1}(\mathbb{T})$, to jedyne rozwiązanie (8) jest takie, że

$$u \in L^\infty(0, T; W^{1,1}), \quad \int_\Omega \Phi(u_x(x, t)) dx \leq \int_\Omega \Phi\left(\frac{du_0}{dx}(x)\right) dx.$$