Politechnika Wrocławska

XXX-lecie Instytutu Matematyki Stosowanej i Mechaniki UW
Konferencja
Warszawa, 20-22 kwietnia 2017

Wojtek Okrasiński

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Politechnika Wrocławska

Moich przygód kilka z modelowaniem matematycznym

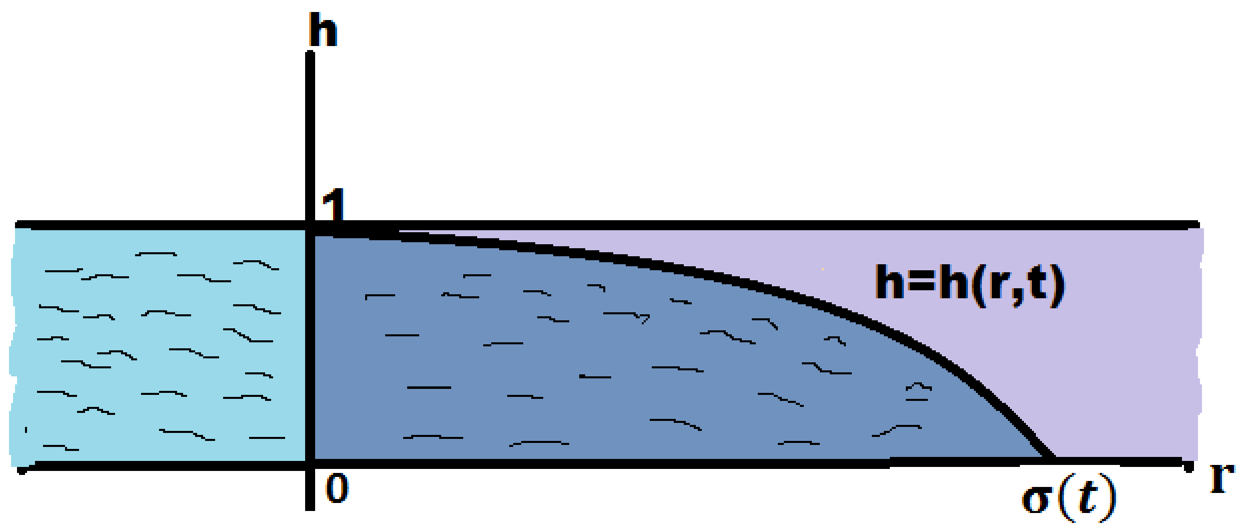
Wstęp

- Celem referatu jest przedstawienie kilku bardziej lub mniej poważnych problemów ‘z życia wziętych’, w których modelowaniu brałem udział. Wszystkie przedstawione zagadnienia biorą swoje początki w Polsce. W trakcie studiów nad tymi problemami i później powstawały zaskakujące sytuacje stanowiące rodzaj swoistych przygód dla mnie. Uwaga : Będzie niewiele wzorów.

Przygoda pierwsza:
Kiedy zbiorniki poflotacyjne zatrują studnie wody pitnej?

- Problem pochodzi z CUPRUM (1974)
- Zanieczyszczona woda infiltruje ze zbiorników poflotacyjnych w otaczający grunt
- Po jakim czasie zanieczyszczenia dotrą do studni z wodą pitną?

Model matematyczny - szkic



Model matematyczny 1-D

- $h_t = \left(h^2\right)_{rr}, \quad r > 0, t > 0$
- $h(0,t) = 1, \; t > 0$
- $h(r,0) = 0, \; r > 0$
- $\sigma(t) = c\sqrt{t}$
- Numeryczna wartość stałej $c>0$ może być wyznaczona z bardzo dużą dokładnością.

Model matematyczny w przypadku symetrii radialnej

- $h_t = \left(h^2\right)_{rr} + \frac{1}{r+1}\left(h^2\right)_r, \quad r > 0, t > 0$
- $h(0,t) = 1, \; t > 0$
- $h(r,0) = 0, \; r > 0$
- Goncerzewicz,Marcinkowska, Okrasiński, Tabisz, *Applicationes Mathematicae 1978*

Asymptotyka w przypadku radialnym

- $\boldsymbol{log\sigma(t) \sim \frac{1}{2} logt,\ t \to \infty}$ **(WO 1991- metody równań całkowych)**
- $\boldsymbol{\sigma(t) \sim c\frac{\sqrt{t}}{logt^{\frac{1}{4}}},\ \ t \to \infty}$ **(Quiros, Vazquez 1998)**
- **W 1998 roku została zaprezentowana rozprawa doktorska Quirosa, w której dano wiele odpowiedzi na pytania związane z modelem z 1978 roku**

Pewna klasa równań całkowych związana z problemem

- $u(x) = \int_0^x k(x-s)g\big(u(s)\big)ds,$
- $k \geq 0, g \uparrow, g(0) = 0$
- $u \equiv 0$ - trywialne rozwiązanie
- szukanie nietrywialnych rozwiązań u w przypadku g niespełniających w zerze warunku Lipschitza (nowe kryteria na istnienie nietrywialnych rozwiązań)
- W świecie powstało co najmniej kilka doktoratów na ten temat

Pewna nierówność

- Nierówność z lematu w pracy Bushella i Okrasińskiego o istnieniu nietrywialnych rozwiązań równania całkowego (*J.London Math.Soc*. 1990)
- $\int_0^x (x-t)^{p-1} f^p(t)dt \le \left(\int_0^x f(t)dt\right)^p$,
- $0 \le x \le b$
- $0 < b \le 1,\ p \ge 1,\ f \in C,\ f \ge 0,\ f \uparrow$

Nierówność Bushella-Okrasinskiego

- Oberwolfach (grudzień1990) - Wolfgang Walter- pytanie o możliwość uogólnienia nierówności BO z lematu w pracy
- 1998 - nierówność BO pojawia się w *A Dictionary of Inequalities*, P.S.Bullen ed.Longman

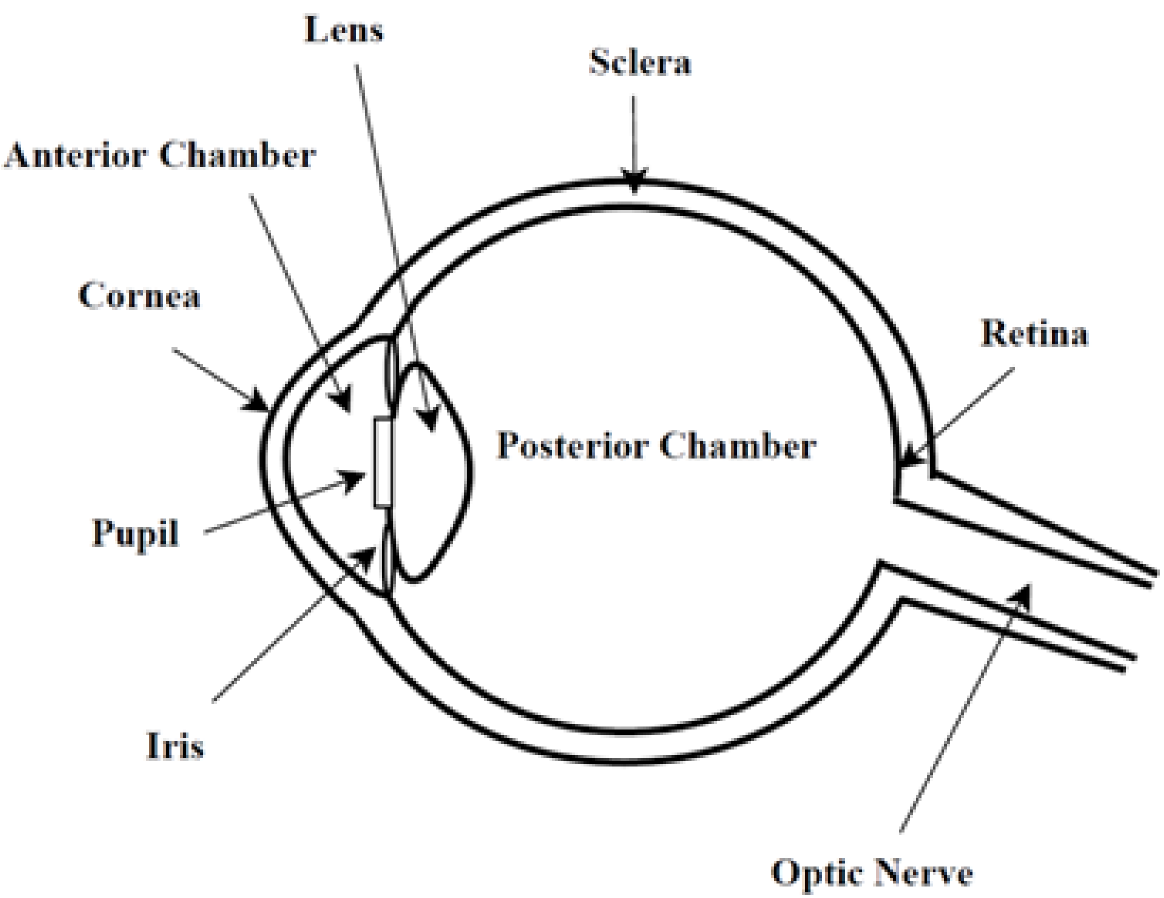
Nierówności typu BO

- Od roku 2005 pierwsze uogólnienia nierówności BO dla różnych rodzajów całek używanych w teorii informacji
- 2015 - zastosowanie nierówności typu BO w nowym krótkim dowodzie twierdzenia o maksimum entropii Renyi'ego
- Czyli przygoda trwa już ok. 40 lat

Przygoda druga:
Czy można bezinwazyjnie zmierzyć ciśnienie międzygałkowe w oku (IOP)?

- Grupa Optyki Widzenia Politechniki Wrocławskiej (2008)
- Odpowiedni matematyczny opis kształtu rogówki ma wielkie znaczenie dla opracowania efektywnych algorytmów umożliwiających aparaturze medycznej na dokładne i bezinwazyjne pomiary IOP. Ma to bezpośredni wpływ na jakość i skuteczność w leczeniu zaburzeń wzroku

Cornea - rogówka



Najprostszy model matematyczny (2012)

- Przy założeniu symetrii radialnej kształt rogówki $h(r)$ $(r \in [0,1])$ został opisany następująco (2012 - ŁP i WO):

$$-h'' + ah = \frac{b}{\sqrt{1+(h')^2}}, \; h(1) = 0, h'(0) = 0,$$

a i b - bezwymiarowa sprężystość i IOP

- Zaproponowano przybliżone rozwiązanie tego zagadnienia, które aproksymuje 15000 danych eksperymentalnych z dokładnością mniejszą niż 1%

Teoretyczne i aplikacyjne znaczenie problemu

- Poruszony i zanalizowany problem nie dość, że stał się impulsem dla znalezienia ciekawych rezultatów matematycznych, to ma bezpośredni związek z próbą bezinwazyjnego pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego (IOP). Wyznaczenie ciśnienia wewnątrzgałkowego oparte jedynie na pomiarze kształtu rogówki nie było opracowane przez nikogo.

Doktoraty matematyczne z problemami związanymi z rogówką.

- Mathematical analysis of a new corneal topography model - Łukasz Płociniczak, Wrocław 2013
- Mathematical modelling in biomedical optics and ophthalmolgy - Dario Ramoz Lopez, Almeria 2014 (patent wykorzystywany w klinice okulistycznej)
- Mathematical analysis of some differential models involving the Euclidean or the Minkowski mean curvature operator - Chiara Corsato, Triest 2015

Keratokonus (Springer 2017) - książka przeznaczona dla oftalmologów

- W książce można znaleźć odnośniki do wcześniejszych rezultatów matematycznych, czyli matematyka pomaga w diagnozowaniu chorób rogówki
- Keratokonus - Springer

Politechnika Wrocławska

Przygoda trzecia: Jak dobrze wysuszyć kiełbasę?

- Problem pochodzi ze średniej wielkości wytwórni wędlin (2009)

Jak w praktyce suszy się kiełbasę?

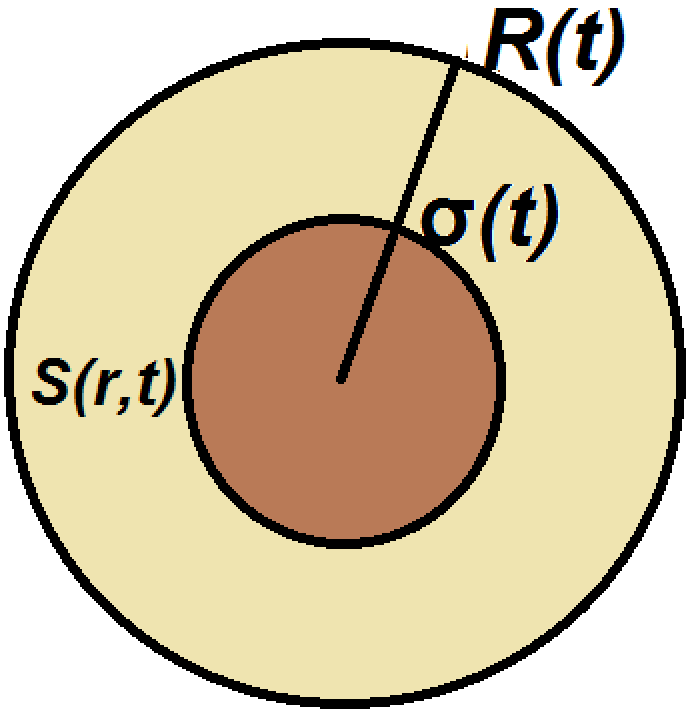
- Suszymy kiełbasę redukując ilość wody z 70% do 60%
- Czas suszenia nie może być dłuższy niż 4 dni
- Zewnętrzna wilgotność i temperatura mogą być regulowane
- Czasami mamy ostre rozdzielenie warstw między wilgotnym a suchym obszarem. Powstaje tzw. „oko"
- Wilgotność wewnątrz oka - 70%, a na zewnątrz - 60%
- Nasz cel: Kiełbasa bez oka

Model matematyczny

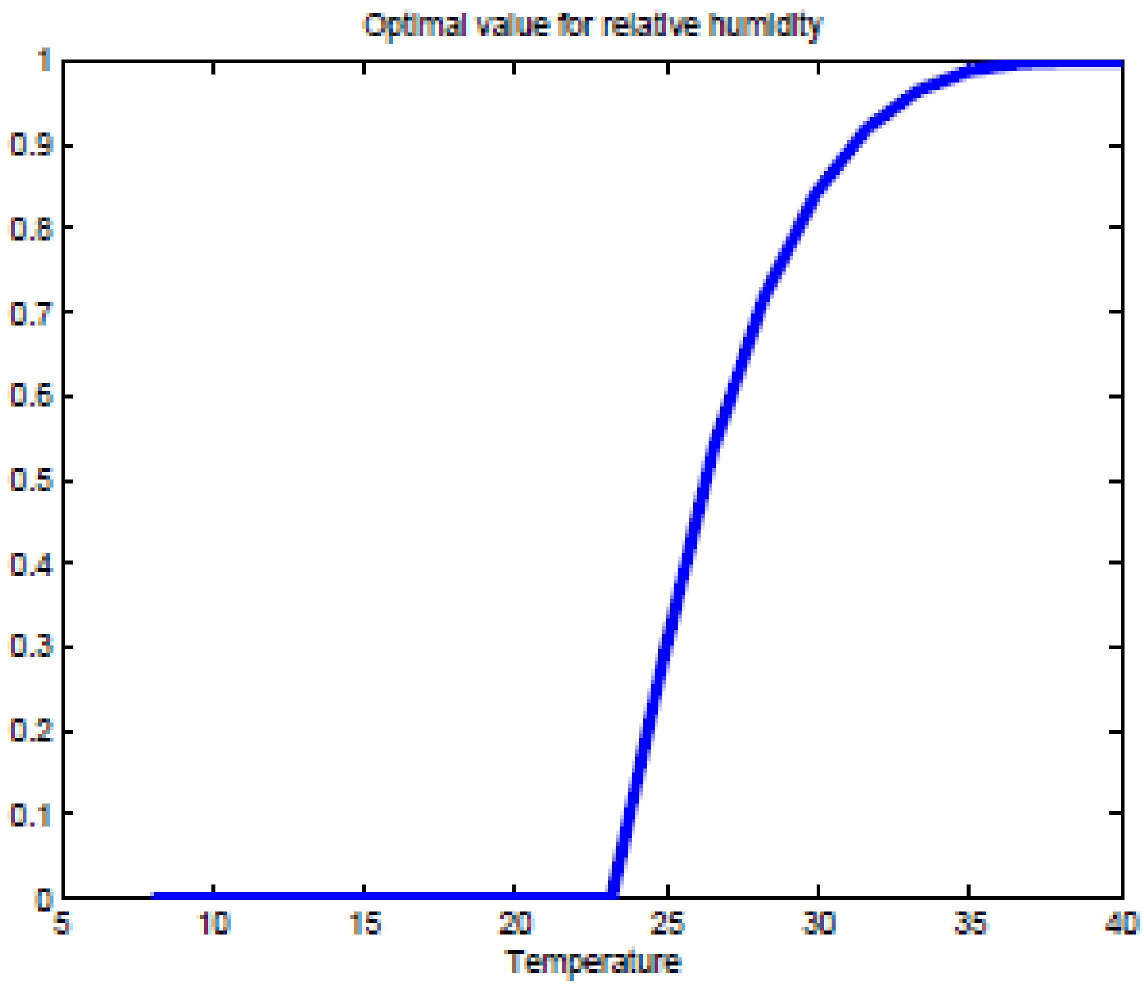
- Matematyczny model dla tego problemu ze swobodnym brzegiem jest opisany radialnym równaniem dyfuzji dla ośrodków porowatych opartym na prawie Darcy'ego
- $R(t)$– promień kiełbasy w chwili t
- $S(r,t)$ – nasycenie wodą w punkcie r

  i chwili t $(0<r<R(t))$
- $\sigma(t)$ - swobodny brzeg

Przy jakiej temperaturze i wilgotności względnej istnieje taki czas $t^* < \infty$, *że* $\sigma(t^*)=0$?



Jak dobrać optymalną wilgotność względną suszenia kiełbasy?



Kiełbasiany problem stał się słynny

Dwa wykłady prof. Helmuta Neunzerta:

- Wiedeń (2011)
- Tartu (2013) - konferencja Mathematical Modelling and Analysis

- W niektórych miejscach bywam nazywany „saussage professor”

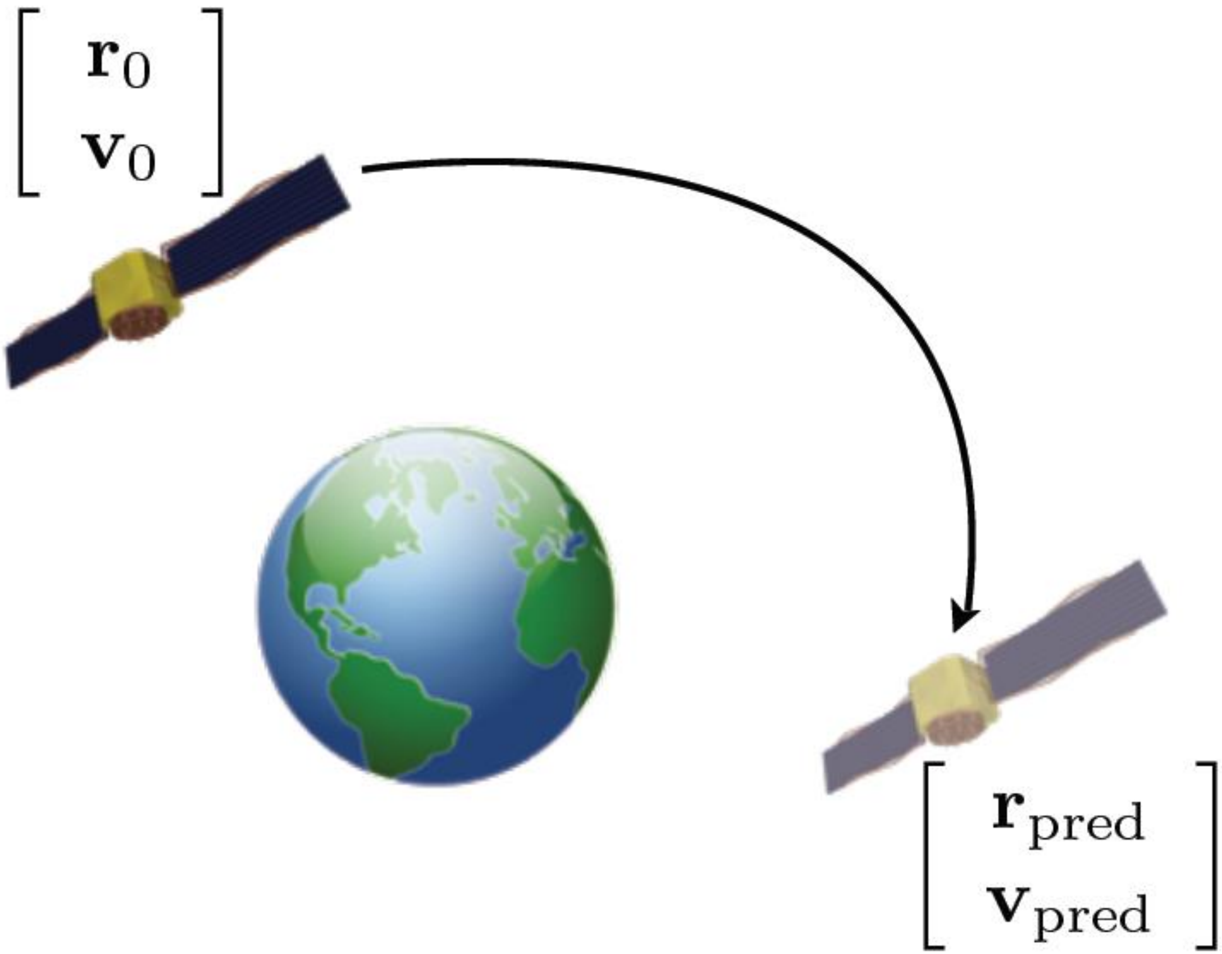
Przygoda czwarta:
Jak określać położenie satelity?

- Prace nad problemem wzięły początek we Wrocławiu ok.2013 roku
- Ta tematyka była interesująca dla jednej z moich studentek studiów magisterskich ECMI.

Cel projektu

- Celem miało być znalezienie metody całkowania numerycznego mającej zastosowanie do określania pozycji satelity w dowolnym czasie na podstawie równań ruchu, kiedy znana jest początkowa pozycja i prędkość.
- Metoda ta powinna być szybka i wyznaczać pozycję z akceptowalną dokładnością

Wyznaczanie pozycji satelity



Dlaczego problem jest ważny?

- Ciągłą kontrola położenia satelity za pomocą zewnętrznych systemów nawigacyjnych jest zbyt energochłonna
- Czasami bywa zawodna

Ciekawa historia związana z projektem

- We wrześniu 2015 roku otrzymałem niespodziewany email:
- Zaproszenie przez Parliamentary Space Committee do House of Commons w Pałacu Westminster w Londonie na uroczystość zakończenia projektów w ramach Space Internship Network (SPIN)

Ciekawa historia związana z projektem

- Powód zaproszenia: moja studentka zakończyła swój projekt SPIN z wyróżnieniem.
- Więcej informacji można znaleźć na stronie www
- SPIN

Jak zakończyła się ta przygoda?

- Po ukończeniu studiów moja była studentka pracuje w UK jako „space ships software engineer”przygotowując oprogramowanie dla nanosatelitów.

Przygoda piąta:
Czy pies może wejść pod maskę samochodu?

- Problem powstał w pewnej zabawnej sytuacji (o czym będzie na końcu) w 2015 roku.
- Modelowaniem tego problemu zajął się student III roku studiów inżynierskich Matematyka Stosowana na PWr.
- Kilka kolejnych slajdów pochodzi z prezentacji studenta

Problemy projektu

- Dużo zależy od rasy pasa, wielkości, wytrenowania;

- Dużo zależy od samochodu i upakowania wokół silnika;

Skoro koty mogą czemu nie psy?

- Wiadomo, że koty potrafią wejść pod maskę samochodu;

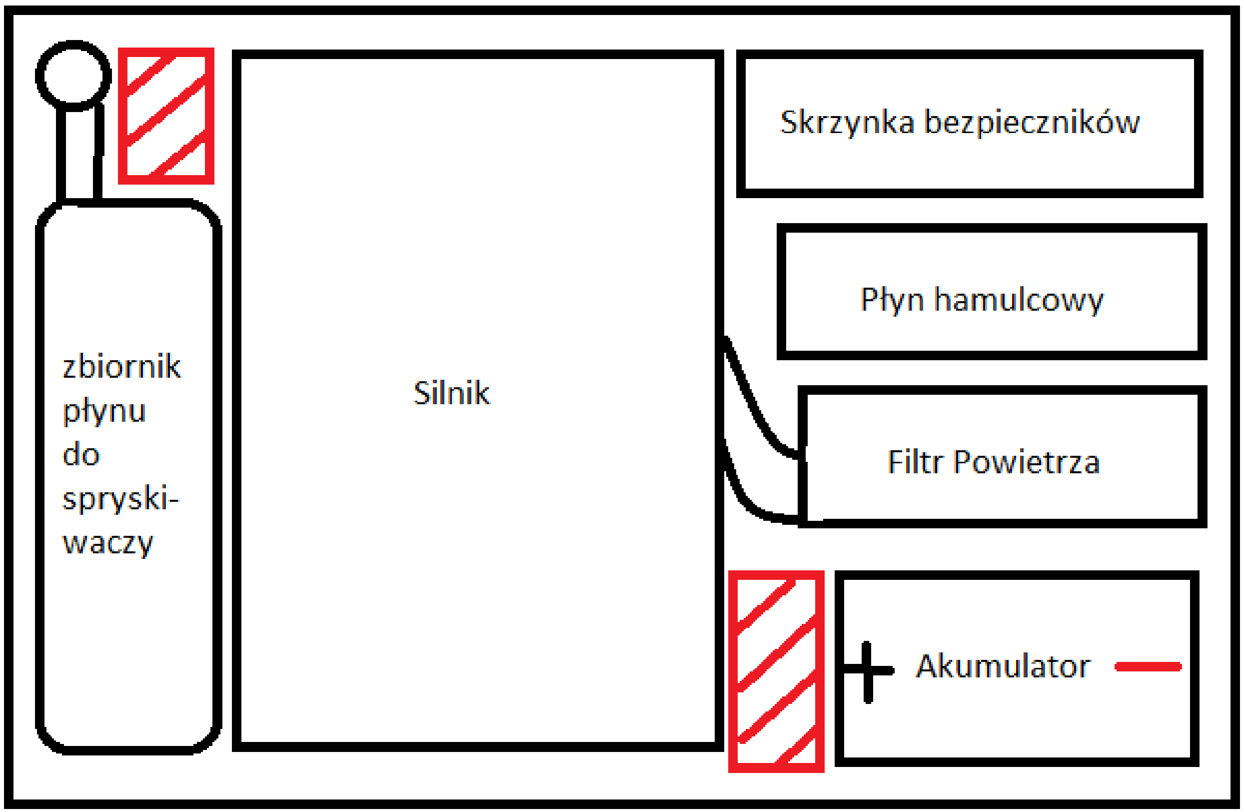
- Być może dobrze będzie zastanowić się jak koty wchodzą pod maskę;

Specyfikacja samochodu

- Ponieważ bardzo dużo zależy od wyboru samochodu, zdecydowano się pracować na modelu VW Golf GL;
- Samochód został zbadany z góry i od strony podwozia; Znaleziono dwa kanały którymi zwierzę mogłoby się dostać na wysokość silnika;

Widok na silnik, pod maską

Na czerwono wskazano dwie możliwe drogi



Pomiary psa i kota

- W celu oszacowania jak bardzo pies może się zgiąć, wyszukano zdjęcie zwiniętego psa(i kota dla porównania):

Pomiar promienia zwinięcia psa

- Do zwinięcia dopasowano okrąg

Podsumowanie studenta

- Zgodnie z naszym tokiem myślenia, w tym modelu samochodu pies nie powinien wejść pod maskę; Poza naturalną niechęcią psów do tego typu miejsc, pies nie byłby w stanie pokonać „drugiego progu” ze względu na swoje wymiary
- Jest to zbieżne z wiedzą o braku tego typu przypadków

Mój komentarz do prezentacji o psie

Pies może wejść pod maskę

Autor prezentacji zapomniał o miniaturowych jamnikach

Nazywam się Henio
Dziękuję za uwagę