

Aproksymacje i iteracje

Leszek Marcinkowski

Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

XXX-lecie IMSM

Modele matematyczne

- prognoza pogody
- charakterystyka prądowo-napięciowa lasera półprzewodnikowego
- przepływ krwi w tętnicy
- wycena opcji barierowych
- odrestaurowywanie zdjęcia

Co mają wspólnego ze sobą?

- Wszystkie wymagają rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych.
- W praktycznie spotykanych przypadkach:
 - nie ma jawnych wzorów na rozwiązania
 - analiza rozwiązań jest trudna

Konkluzja: rozwiązywanie takich równań wymaga aproksymacji i użycia komputera

Modele matematyczne

- prognoza pogody
- charakterystyka prądowo-napięciowa lasera półprzewodnikowego
- przepływ krwi w tętnicy
- wycena opcji barierowych
- odrestaurowywanie zdjęcia

Co mają wspólnego ze sobą?

- Wszystkie wymagają rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych.
- W praktycznie spotykanych przypadkach:
 - nie ma jawnych wzorów na rozwiązania
 - analiza rozwiązań jest trudna

Konkluzja: rozwiązywanie takich równań wymaga aproksymacji i użycia komputera

Modele matematyczne

- prognoza pogody
- charakterystyka prądowo-napięciowa lasera półprzewodnikowego
- przepływ krwi w tętnicy
- wycena opcji barierowych
- odrestaurowywanie zdjęcia

Co mają wspólnego ze sobą?

- Wszystkie wymagają rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych.
- W praktycznie spotykanych przypadkach:
 - nie ma jawnych wzorów na rozwiązania
 - analiza rozwiązań jest trudna

Konkluzja: rozwiązywanie takich równań wymaga aproksymacji i użycia komputera

Modele matematyczne

- prognoza pogody
- charakterystyka prądowo-napięciowa lasera półprzewodnikowego
- przepływ krwi w tętnicy
- wycena opcji barierowych
- odrestaurowywanie zdjęcia

Co mają wspólnego ze sobą?

- Wszystkie wymagają rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych.
- W praktycznie spotykanych przypadkach:
 - nie ma jawnych wzorów na rozwiązania
 - analiza rozwiązań jest trudna

Konkluzja: rozwiązywanie takich równań wymaga aproksymacji i użycia komputera

Modele matematyczne

- prognoza pogody
- charakterystyka prądowo-napięciowa lasera półprzewodnikowego
- przepływ krwi w tętnicy
- wycena opcji barierowych
- odrestaurowywanie zdjęcia

Co mają wspólnego ze sobą?

- Wszystkie wymagają rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych.
- W praktycznie spotykanych przypadkach:
 - nie ma jawnych wzorów na rozwiązania
 - analiza rozwiązań jest trudna

Konkluzja: rozwiązywanie takich równań wymaga aproksymacji i użycia komputera

Modele matematyczne

- prognoza pogody
- charakterystyka prądowo-napięciowa lasera półprzewodnikowego
- przepływ krwi w tętnicy
- wycena opcji barierowych
- odrestaurowywanie zdjęcia

Co mają wspólnego ze sobą?

- Wszystkie wymagają rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych.
- W praktycznie spotykanych przypadkach:
 - nie ma jawnych wzorów na rozwiązania
 - analiza rozwiązań jest trudna

Konkluzja: rozwiązywanie takich równań wymaga aproksymacji i użycia komputera

Modele matematyczne

- prognoza pogody
- charakterystyka prądowo-napięciowa lasera półprzewodnikowego
- przepływ krwi w tętnicy
- wycena opcji barierowych
- odrestaurowywanie zdjęcia

Co mają wspólnego ze sobą?

- Wszystkie wymagają rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych.
- W praktycznie spotykanych przypadkach:
 - nie ma jawnych wzorów na rozwiązania
 - analiza rozwiązań jest trudna

Konkluzja: rozwiązywanie takich równań wymaga aproksymacji i użycia komputera

Modele matematyczne

- prognoza pogody
- charakterystyka prądowo-napięciowa lasera półprzewodnikowego
- przepływ krwi w tętnicy
- wycena opcji barierowych
- odrestaurowywanie zdjęcia

Co mają wspólnego ze sobą?

- Wszystkie wymagają rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych.
- W praktycznie spotykanych przypadkach:
 - nie ma jawnych wzorów na rozwiązania
 - analiza rozwiązań jest trudna

Konkluzja: rozwiązywanie takich równań wymaga aproksymacji i użycia komputera

Zadania

- Konstrukcja dyskretyzacji: MRS, **MES**, MSO, metoda spektralna, element spektralny, metody bezsiatkowe etc.

Nowe dyskretyzacje: **Nieciągła metoda Galerkina**, metoda mortarowa.

(M. Dryja, P. Krzyżanowski, P. Kowalczyk, L. Marcinkowski, K. Sakowski).

- Analiza : istnienie - jednoznaczność rozwiązań zadania dyskretnego - analiza zbieżności , oszacowania błędu etc.
(M. Dryja, P. Krzyżanowski, P. Kowalczyk, L. Marcinkowski, K. Moszyński, K. Sakowski)

- Szybkie rozwiązanie powstałego układu równań - **miliony czy nawet miliardy niewiadomych**
(M. Dryja, P. Krzyżanowski, L. Marcinkowski, K. Moszyński, K. Sakowski)

Zadania

- Konstrukcja dyskretyzacji: MRS, **MES**, MSO, metoda spektralna, element spektralny, metody bezsiatkowe etc.

Nowe dyskretyzacje: **Nieciągła metoda Galerkina**, metoda mortarowa.

(M. Dryja, P. Krzyżanowski, P. Kowalczyk, L. Marcinkowski, K. Sakowski).

- Analiza : istnienie - jednoznaczność rozwiązań zadania dyskretnego - analiza zbieżności , oszacowania błędów etc.
(M. Dryja, P. Krzyżanowski, P. Kowalczyk, L. Marcinkowski, K. Moszyński, K. Sakowski)

- Szybkie rozwiązanie powstałego układu równań - **miliony czy nawet miliardy niewiadomych**

(M. Dryja, P. Krzyżanowski, L. Marcinkowski, K. Moszyński, K. Sakowski)

Metoda Galerкина i jej ograniczenia

Najprostszy, modelowy przykład: stacjonarne równanie dyfuzji:

$$-\Delta u = f \quad \text{w } \Omega, \quad u = 0 \text{ na } \partial\Omega$$

Mnożąc przez funkcję testową i całkując przez części dostajemy

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Metoda Galerкина i jej ograniczenia

Problem (oryginalny)

Znaleźć $u \in H_0^1(\Omega)$ t.że:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Jego aproksymacja w przestrzeni skończenie wymiarowej $V_h \subset H_0^1(\Omega)$:

Problem (przybliżony)

Znaleźć $u \in V_h$ t.że:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V_h$$

Metoda Galerкина i jej ograniczenia

Problem (oryginalny)

Znaleźć $u \in H_0^1(\Omega)$ t.ż.e:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Jego aproksymacja w przestrzeni skończenie wymiarowej $V_h \subset H_0^1(\Omega)$:

Problem (przybliżony)

Znaleźć $u \in V_h$ t.ż.e:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V_h$$

Metoda Galerкина i jej ograniczenia

Problem (oryginalny)

Znaleźć $u \in H_0^1(\Omega)$ t.że:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Jego aproksymacja w przestrzeni skończenie wymiarowej $V_h \subset H_0^1(\Omega)$:

Problem (przybliżony)

Znaleźć $u \in V_h$ t.że:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V_h$$

Metoda elementu skończonego (MES)

Problem (przybliżony)

Znaleźć $u \in V_h$ t.że:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V_h$$

MES = metoda Galerkina + wybór $V_h \subset H^1(\Omega)$:

$$V_h = \{v \in C(\Omega) : v|_{\kappa} \text{ jest wielomianem st. } \leq p\}$$

Przykład z fizyki laserów

(K. Sakowski) Szukamy $\psi, F_n, F_p \in H^1(\Omega)$, takie że dla każdego $\phi \in H_{0,\Sigma_D}^1(\Omega)$ zachodzi

$$\int_{\Omega} \varepsilon_0 \varepsilon_{33}(x) \nabla \psi(x) \cdot \nabla \phi(x) dx = \int_{\Omega} q [\rho(x) - n(x) - N_a^-(x) + N_d^+(x)] \phi(x) dx$$

$$\int_{\Omega} \mu_n(x) n(x) \nabla F_n(x) \cdot \nabla \phi(x) dx = - \int_{\Omega} q R(x, \psi, F_n, F_p) \phi(x) dx$$

$$\int_{\Omega} \mu_p(x) p(x) \nabla F_p(x) \cdot \nabla \phi(x) dx = \int_{\Omega} q R(x, \psi, F_n, F_p) \phi(x) dx$$

$$n(x) := N_c(x) \cdot \exp\left(\frac{F_n(x) - \bar{E}_c(x) + q\psi(x)}{kT}\right)$$

$$p(x) := N_v(x) \cdot \exp\left(\frac{\bar{E}_v(x) - F_p(x) - q\psi(x)}{kT}\right)$$

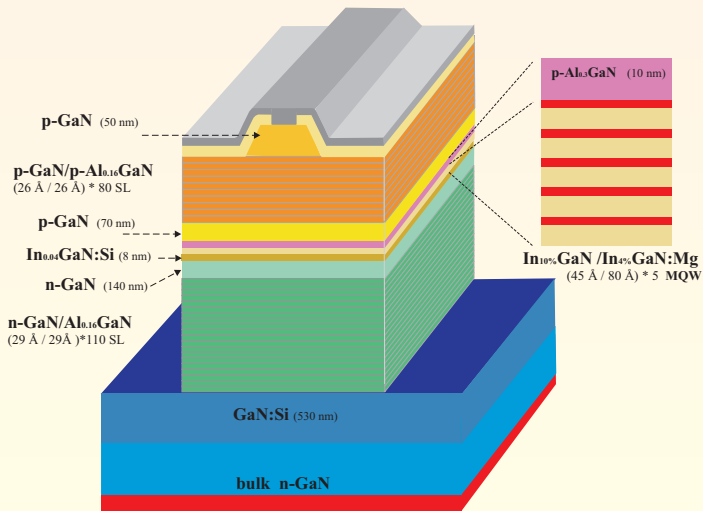
$$N_d^+(x) := N_d(x) \left[1 + g_d \exp\left(\frac{F_n(x) - \bar{E}_c(x) + E_d(x) + q\psi(x)}{kT}\right)\right]^{-1}$$

$$N_a^-(x) := N_a(x) \left[1 + g_a \exp\left(\frac{\bar{E}_v(x) + E_a(x) - F_p(x) - q\psi(x)}{kT}\right)\right]^{-1}$$

Rekombinacje

- $R^{SRH}(x, n, p) = \frac{np - n_0 p_0}{\tau_p^{SRH}(n + n_1) + \tau_n^{SRH}(n + p_1)},$
- $R^{rad}(x, n, p) = C^{rad}[np - n_0 p_0],$
- $R^{Aug}(x, n, p) = \left(C_n^{Aug} n + C_p^{Aug} p \right) (np - n_0 p_0).$

Laser



Nieciągła metoda Galerkina

(M. Dryja, P. Krzyżanowski, P. Kowalczyk - dyskretyzacje i solvery, L. Marcinkowski - solvery)

Zadanie modelowe:

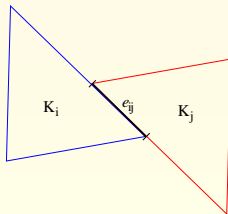
$$-\nabla(\rho\nabla u) = f \quad \text{w } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega$$

$$\int_{\Omega} \rho \nabla u \cdot \nabla v \, dx = (f, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

ρ może być nieciągły.

Triangulacja T_h na $\bar{\Omega}$

- Niezgodna, regularna, lokalnie jednorodna $h_i \simeq |e_{ij}| \simeq h_j$



Nieciągła metoda Galerkina

(M. Dryja, P. Krzyżanowski, P. Kowalczyk - dyskretyzacje i solvery, L. Marcinkowski - solvery)

Zadanie modelowe:

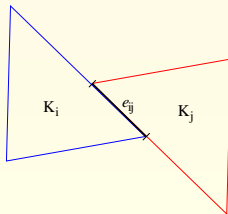
$$-\nabla(\rho\nabla u) = f \quad \text{w } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega$$

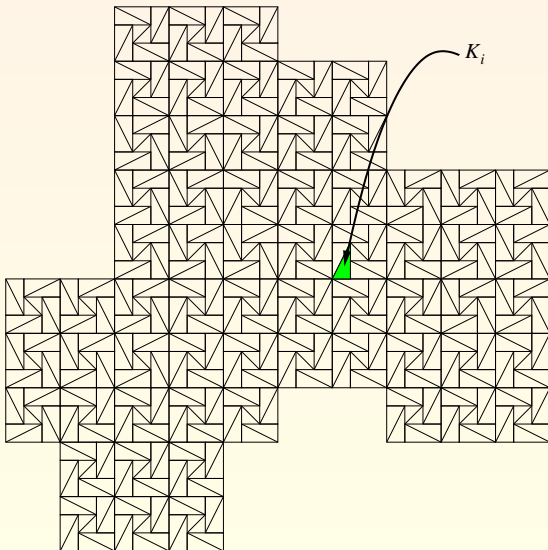
$$\int_{\Omega} \rho \nabla u \cdot \nabla v \, dx = (f, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

ρ może być nieciągły.

Triangulacja T_h na $\bar{\Omega}$

- Niezgodna, regularna, lokalnie jednorodna $h_i \simeq |e_{ij}| \simeq h_j$



Przykładowa siatka T_h 

DFEM — metoda penalizacji skoków

Przestrzeń elementu skończonego:

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{\kappa} \in P_p(\kappa) \quad \forall \kappa \in T_h\}$$

Zalety:

- łatwa praca z siatkami niezgodnymi
→ *h-refinement*
- łatwe praca z wielomianami różnego/wysokiego stopnia
→ *p-refinement*

DNFEM — metoda penalizacji skoków

Przestrzeń elementu skończonego:

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{\kappa} \in P_p(\kappa) \quad \forall \kappa \in T_h\} \not\subseteq H_0^1(\Omega)$$

Zalety:

- łatwa praca z siatkami niezgodnymi
→ *h-refinement*
- łatwe praca z wielomianami różnego/wysokiego stopnia
→ *p-refinement*

DGFEM — wariant SIP (penalizacji skoków)

$$\sum_k \int_{\kappa} \rho \nabla u \nabla v$$

$$= (f, v)_{\Omega}$$

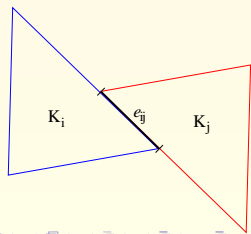
DGFEM — wariant SIP (penalizacji skoków)

$$\sum_k \int_{\kappa} \rho \nabla u \nabla v + \sum_e \int_e \gamma [u][v]$$

$$= (f, v)_{\Omega}$$

gdzie $\delta > 0$ dost. duże oraz dla $x \in e_{ij} = \kappa_i \cap \kappa_j$

$$\gamma(x) = \frac{\delta \rho^2}{|e_{ij}|} \frac{\rho_i \rho_j}{\rho_i + \rho_j}, \quad [u] = u_i n_i + u_j n_j$$



DGFEM — wariant SIP (penalizacji skoków)

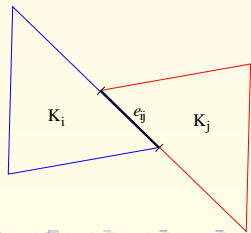
$$\begin{aligned} & \sum_k \int_{\kappa} \rho \nabla u \nabla v + \sum_e \int_e \gamma [u][v] \\ & \quad - \sum_e \int_e \{\nabla u\}_\omega [v] \\ & = (f, v)_\Omega \end{aligned}$$

gdzie $\delta > 0$ dost. duże oraz dla $x \in e_{ij} = \kappa_i \cap \kappa_j$

$$\gamma(x) = \frac{\delta \rho^2}{|e_{ij}|} \frac{\rho_i \rho_j}{\rho_i + \rho_j}, \quad [u] = u_i n_i + u_j n_j$$

$$\{\nabla v\}_\omega = \omega_j \rho_i \nabla u_i + \omega_i \rho_j \nabla u_j,$$

przy czym $\omega_j = \rho_j / (\rho_i + \rho_j)$.



DGFEM — wariant SIP (penalizacji skoków)

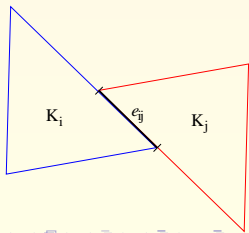
$$\begin{aligned}
 & \sum_k \int_{\kappa} \rho \nabla u \nabla v + \sum_e \int_e \gamma [u][v] \\
 & - \sum_e \int_e \{\nabla u\}_\omega [v] \\
 & - \sum_e \int_e \{\nabla v\}_\omega [u] = (f, v)_\Omega
 \end{aligned}$$

gdzie $\delta > 0$ dost. duże oraz dla $x \in e_{ij} = \kappa_i \cap \kappa_j$

$$\gamma(x) = \frac{\delta \rho^2}{|e_{ij}|} \frac{\rho_i \rho_j}{\rho_i + \rho_j}, \quad [u] = u_i n_i + u_j n_j$$

$$\{\nabla v\}_\omega = \omega_j \rho_i \nabla u_i + \omega_i \rho_j \nabla u_j,$$

przy czym $\omega_j = \rho_j / (\rho_i + \rho_j)$.



Aproksymacja DGFEM SIP

Twierdzenie

*Dla dostatecznie regularnego rozwiązania dokładnego u^**

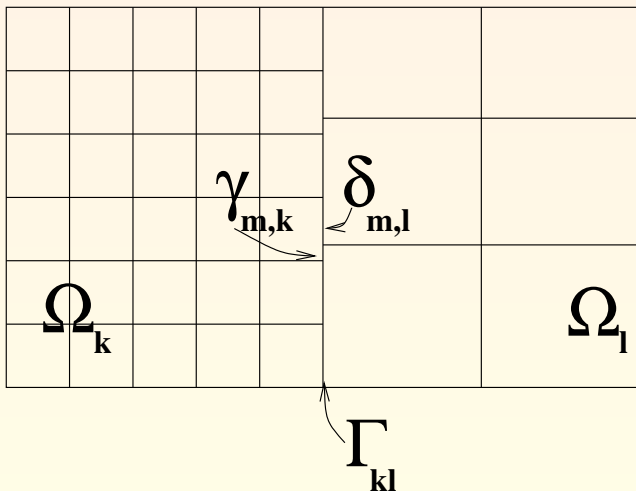
$$|||u - u^*||| \lesssim \sum_{\kappa_i} \frac{h_i^{\min(\rho, s)}}{\rho^{s-1/2}} \rho_i^{1/2} |u^*|_{H^{s+1}(\kappa_i)},$$

gdzie

$$|||u|||^2 = \sum_{\kappa} \int_{\kappa} \rho \nabla u \cdot \nabla u dx + \sum_e \int_e \gamma [u] \cdot [u] ds.$$

[Perugia and Schötzau, 2005], [Houston, Schwab and Süli, 2000]

Metoda mortarowa



Rysunek: Niezgodne siatki na krawędzi Γ_{kl} .

Metoda mortarowa

- Przestrzeń dyskretna mortarowa

$$V^h = \{u \in X_h(\Omega) : \forall \delta_{m,l} \subset \Gamma, \\ \forall \psi \in M^{h_j}(\delta_{m,l}) \int_{\Gamma_{kl}} (u_k|_{\gamma_{m,k}} - u_l|_{\delta_{m,l}}) \psi \, ds = 0 \},$$

- Zadanie dyskretne: znajdź $u_h \in V^h$

$$\sum_k \int_{\Omega_k} \nabla u_h^* \nabla v_h \, dx = f(v_h) \quad \forall v_h \in V^h.$$

- Oszacowanie błędu:

$$\sum_k \|\nabla u^* - u_h^*\|_{L^2(\Omega_k)}^2 \leq C \sum_k h_k^2 |u|_{H^2(\Omega_k)}^2$$

Miliony czy nawet miliardy niewiadomych

- Po dyskretyzacji otrzymujemy ogromne układy równań liniowych lub nieliniowych - ilość niewiadomych rzędu milionów czy nawet miliardów.
- Standardowe solvery dla równań nieliniowych wymagają rozwiązywania zlinearyzowanych układów równań liniowych
- Metody bezpośrednie nie działają - potrzeba stosowania metod iteracyjnych np. CG czy GMRES.

Gordon Bell Prize 2016

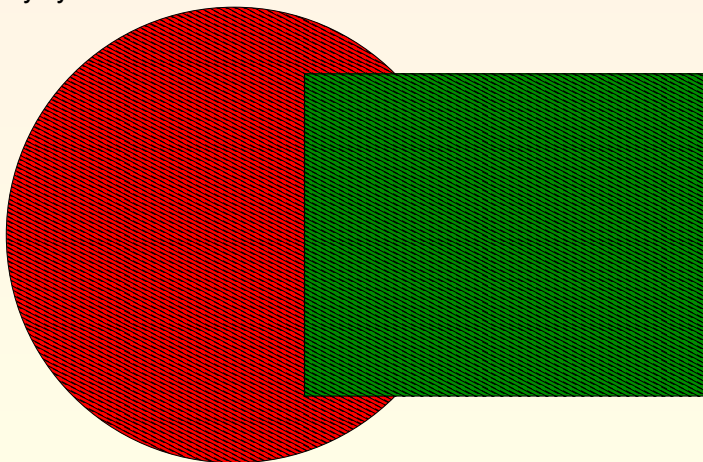
- Zesłoroczna nagroda Gordona Bella w HPC (high-performance computing): *10M-rdzeni skalowalny w pełni zamknięty solver dla Dynamiki Atmosfery (Nonhydrostatic Atmospheric Dynamics)*
- Sunway TaihuLight superkomputer
 - 10.5M rdzeni,
 - Wydajność 7.95 PFLOPS in podwójnej precyzji
 - rozdzielczość horyzontalna: 488m (ponad 770 miliardów niewiadomych)
 - symulacja ok 0.07 roku w ciągu dnia
- **Solver:** addytywna metoda Schwarza - metoda dekompozycji obszaru

Gordon Bell Prize 2016

- Zesłoroczna nagroda Gordona Bella w HPC (high-performance computing): *10M-rdzeni skalowalny w pełni zamknięty solver dla Dynamiki Atmosfery (Nonhydrostatic Atmospheric Dynamics)*
- Sunway TaihuLight superkomputer
 - 10.5M rdzeni,
 - Wydajność 7.95 PFLOPS in podwójnej precyzji
 - rozdzielczość horyzontalna: 488m (ponad 770 miliardów niewiadomych)
 - symulacja ok 0.07 roku w ciągu dnia
- **Solver:** addytywna metoda Schwarza - metoda dekompozycji obszaru

Alternująca Metoda Schwarz

Oryginalny rysunek Schwarza



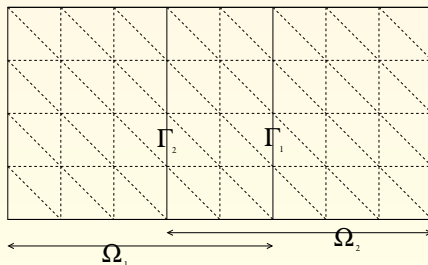
Alternująca Metoda Schwarz - zadanie modelowe

Liniowe eliptyczne RRcz

$$Lu := -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

Obszar $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ i $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$.



$\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega$ and $\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \setminus \partial\Omega$.

Alternująca Metoda Schwarz - zadanie modelowe

u^0 dane, wtedy, iterujemy for $n = 1, 2, \dots$: rozwiązując

$$\begin{aligned} -\Delta u_1^n &= f \quad \text{in } \Omega_1 \\ u_1^n &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u_1^n &= u_2^{n-1} \quad \text{on } \Gamma_1 \end{aligned}$$

otrzymując u_1^n i następnie

$$\begin{aligned} -\Delta u_2^n &= f \quad \text{in } \Omega_2 \\ u_2^n &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ u_2^n &= u_1^n \quad \text{on } \Gamma_2 \end{aligned}$$

otrzymując u_2^n .

Process zbiega. (P. Lions)

Metoda Alternująca Schwarza - Postać macierzowa

Po dyskretyzacji analogicznie - $u^0 \in V^h$ dane, wtedy, dla $n = 1, 2, \dots$ rozwiązujemy

$$\begin{aligned}A_1 u_1^n &= f_1 \quad \text{in } \Omega_1 \\ u_1^n &= u_2^{n-1} \quad \text{on } \Gamma_1\end{aligned}$$

otrzymując $u_1^n \in V_1$ i

$$\begin{aligned}A_2 u_2^n &= f_2 \quad \text{in } \Omega_2 \\ u_2^n &= u_1^n \quad \text{on } \Gamma_2\end{aligned}$$

otrzymując $u_2^n \in V_2$.

Warunki zerowe na $\partial\Omega$ są wprowadzone w zadanie dyskretne.

Prekonditionery

Symetryczna dodatnio określona (SDO) macierz A :

$$Ax = f$$

Metoda iteracyjna CG (sprzężonych gradientów) = szybkość zbieżności zależy od $\kappa(A) = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ współczynnik uwarunkowania A .

Prekonditionery

Prekonditioner - macierz B -SDO taka, że

- obliczenie Bx tanie
- $\kappa(BA) \ll \kappa(A)$ tak by CG dla $BAx = Bf$ zbiegała szybciej (lub inna metoda iteracyjna jeśli B nie jest SDO).
- Optymalny $B = A^{-1}$ ale obliczanie nie jest tanie....
- Dla A z dyskretyzacji MESem: $\kappa(A) = O(h^{-2})$ lub gorzej gdy współczynniki mocno nieregularne.

Metoda Alternująca Schwarza jako prekonditioner

Multiplikatywna metoda Schwarza:

$$\begin{aligned} u^{n+1/2} &= u^n + B_1(f - Au^n) \\ u^{n+1} &= u^{n+1/2} + B_2(f - Au^{n+1/2}) \end{aligned}$$

łąząc 2 kroki:

$$u^{n+1} = u^n + (B_1 + B_2 - B_2AB_1)(f - Au^n) = u^n + B_{MS}(f - Au^n)$$

tj. metoda iteracyjna Richardsona z **niesymetrycznym prekonditionerem**

Multiplikatywną metodę Schwarza można zsymetryzować.

Metoda Alternująca Schwarza jako prekonditioner

Multiplikatywna metoda Schwarza:

$$\begin{aligned} u^{n+1/2} &= u^n + B_1(f - Au^n) \\ u^{n+1} &= u^{n+1/2} + B_2(f - Au^{n+1/2}) \end{aligned}$$

łąząc 2 kroki:

$$u^{n+1} = u^n + (B_1 + B_2 - B_2AB_1)(f - Au^n) = u^n + B_{MS}(f - Au^n)$$

tj. metoda iteracyjna Richardsona z **niesymetrycznym prekonditionerem**

Multiplikatywną metodę Schwarza można zsymetryzować.

Metoda Alternująca Schwarza jako prekonditioner

Multiplikatywna metoda Schwarza:

$$\begin{aligned} u^{n+1/2} &= u^n + B_1(f - Au^n) \\ u^{n+1} &= u^{n+1/2} + B_2(f - Au^{n+1/2}) \end{aligned}$$

łąząc 2 kroki:

$$u^{n+1} = u^n + (B_1 + B_2 - B_2AB_1)(f - Au^n) = u^n + B_{MS}(f - Au^n)$$

tj. metoda iteracyjna Richardsona z **niesymetrycznym prekonditionerem**

Multiplikatywną metodę Schwarza można zsymetryzować.

Metoda Addytywna Schwarza - prekonditioner

Metoda **nie jest współbieżna**

pomysł **usunąć człon łączący** $-B_2AB_1$ z B_{MS}

(M. Dryja, O. Widlund)

Metoda Addytywna Schwarza - prekonditioner:

$$B_{AS} = B_1 + B_2 = B_{MS} - (-B_2AB_1)$$

lub równoważnie:

$$B_{AS} = \begin{pmatrix} A_{\Omega_1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{\Omega_2}^{-1} \end{pmatrix}$$

B_1 i B_2 mogą być obliczone **niezależnie**.

Uogólnia się na wiele podobszarów ale konieczna GRUBA siatka - przestrzeń globalna.

Metoda Addytywna Schwarza - prekonditioner

Metoda **nie jest współbieżna**

 pomysł **usunąć człon łączący** $-B_2AB_1$ z B_{MS}

(M. Dryja, O. Widlund)

Metoda Addytywna Schwarza - prekonditioner:

$$B_{AS} = B_1 + B_2 = B_{MS} - (-B_2AB_1)$$

lub równoważnie:

$$B_{AS} = \begin{pmatrix} A_{\Omega_1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{\Omega_2}^{-1} \end{pmatrix}$$

B_1 i B_2 mogą być obliczone **niezależnie**.

Uogólnia się na wiele podobszarów ale konieczna **GRUBA siatka** - przestrzeń globalna.

Metody Schwarza : multiplikatywna i addytywna

- **Multiplikatywna Metoda Schwarza**

$$u^{n+1} - u^* = (I - B_N A) \dots (I - B_2 A)(I - B_1 A)(u^n - u^*)$$

- **Prekonditioner:** By dostać $B_{MS}f$ wykonaj jeden krok metody z $u^n = 0$

$$I - B_{MS}A = (I - B_N A) \dots (I - B_2 A)(I - B_1 A) = \left(\sum_{k=1}^N B_k + \dots \right) A$$

- Prekonditioner MSM **nie jest równoległy:**

$$B_{MS} = (B_N + \dots + B_1 - B_N A B_{N-1} - \dots)$$

Metody Schwarza : multiplikatywna i addytywna

- **Multiplikatywna Metoda Schwarza**

$$u^{n+1} - u^* = (I - B_N A) \dots (I - B_2 A)(I - B_1 A)(u^n - u^*)$$

- **Prekonditioner:** By dostać $B_{MS}f$ wykonaj jeden krok metody z $u^n = 0$

$$I - B_{MS}A = (I - B_N A) \dots (I - B_2 A)(I - B_1 A) = \left(\sum_{k=1}^N B_k + \dots \right) A$$

- Prekonditioner ASM **jest równoległy:**

$$B_{AS} = B_N + \dots + B_1$$

Oszacowanie uwarunkowania

Theorem

Jeśli zakładka jest rozmiaru H i $\text{diam}(\Omega_k)$ jest rzędu H , i każdy punkt Ω jest pokryty przez skończoną ilość podobszarów Ω'_k , to

$$\kappa(B_{AS}A) \leq CH^{-2}$$

Gruba siatka

- $B_0 = I_0 A_0^{-1} I_0^T$ - gruby operator
- Prekonditioner Addytywny Schwarz:

$$B_0 + B_{AS}$$

Theorem (bez grubej siatki)

Mamy

$$\kappa(B_{AS}A) \leq CH^{-2}$$

Gruba siatka

- $B_0 = I_0 A_0^{-1} I_0^T$ - gruby operator
- Prekonditioner Addytywny Schwarza:

$$B_0 + B_{AS}$$

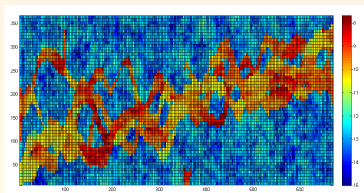
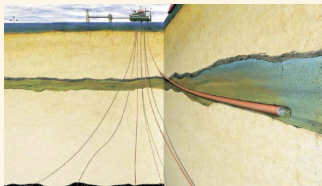
Theorem (z grubą siatką)

Mamy

$$\kappa((B_0 + B_{AS})A) \leq C_2$$

(M. Dryja, O. Widlund)

Silnie zmienny współczynnik



- W wielu zastosowaniach silnie zmienny współczynnik ρ :

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} \rho(x) \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

- ρ gładkie wewnątrz podobszarów - wiele wyników MDO w ciągu ostatnich 20 lat (m.in. M. Dryja, P. Krzyżanowski, L. Marcinkowski)
- ρ silnie zmienne wewnątrz podobszarów - wyniki w ostatnich latach - **adaptacyjne grube siatki** (m.in. L. Marcinkowski, M. Dryja)

**DZIEKUJĘ
ZA
UWAGĘ**