Dystrybuanty pozorne w analizie ekstremów szeregów czasowych

XXX-lecie Instytutu Zastosowań Matematyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski, 20 kwietnia 2017 r.

Adam Jakubowski
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
Toruń

Wykład oparty jest na wynikach własnych
oraz pracach współautorskich
z P. Doukhanem, G. Langiem,
N. Soją-Kukiełą i P. Truszczyńskim

Problem zdarzeń ekstremalnych: dwa podejścia

Japońskie…

Japońskie…

- Lata 60-te XX wieku: Japonia przygotowuje się do budowy swojej sieci elektrowni atomowych.

Japońskie…

- Lata 60-te XX wieku: Japonia przygotowuje się do budowy swojej sieci elektrowni atomowych.
- Problem: jakość zabezpieczeń wobec trzęsień ziemi, w szczególności przeciw tsunami powstałych w wyniku trzęsień ziemi.

Japońskie…

- Lata 60-te XX wieku: Japonia przygotowuje się do budowy swojej sieci elektrowni atomowych.
- Problem: jakość zabezpieczeń wobec trzęsień ziemi, w szczególności przeciw tsunami powstałych w wyniku trzęsień ziemi.
- W okolicach elektrowni w Fukushimie Dai-Ichi w ciągu ok. 100 lat rejestracji, nie zanotowano trzęsienia ziemi o sile większej niż 8 st.

Japońskie. . .

- Lata 60-te XX wieku: Japonia przygotowuje się do budowy swojej sieci elektrowni atomowych.
- Problem: jakość zabezpieczeń wobec trzęsień ziemi, w szczególności przeciw tsunami powstałych w wyniku trzęsień ziemi.
- W okolicach elektrowni w Fukushimie Dai-Ichi w ciągu ok. 100 lat rejestracji, nie zanotowano trzęsienia ziemi o sile większej niż 8 st.
- Ponieważ okres eksploatacji elektrowni atomowej ocenia się na 60 lat, zdroworozsądkowo przyjęto że należy je zabezpieczać przed wstrząsami o sile do 8 st.

Japońskie...

- Lata 60-te XX wieku: Japonia przygotowuje się do budowy swojej sieci elektrowni atomowych.
- Problem: jakość zabezpieczeń wobec trzęsień ziemi, w szczególności przeciw tsunami powstałych w wyniku trzęsień ziemi.
- W okolicach elektrowni w Fukushimie Dai-Ichi w ciągu ok. 100 lat rejestracji, nie zanotowano trzęsienia ziemi o sile większej niż 8 st.
- Ponieważ okres eksploatacji elektrowni atomowej ocenia się na 60 lat, zdroworozsądkowo przyjęto że należy je zabezpieczać przed wstrząsami o sile do 8 st.
- W istocie zignorowano 2 trzęsienia ziemi o sile 8,4-8,5 st., które miały miejsce kilkaset km na północ.

Japońskie...

- Lata 60-te XX wieku: Japonia przygotowuje się do budowy swojej sieci elektrowni atomowych.
- Problem: jakość zabezpieczeń wobec trzęsień ziemi, w szczególności przeciw tsunami powstałych w wyniku trzęsień ziemi.
- W okolicach elektrowni w Fukushimie Dai-Ichi w ciągu ok. 100 lat rejestracji, nie zanotowano trzęsienia ziemi o sile większej niż 8 st.
- Ponieważ okres eksploatacji elektrowni atomowej ocenia się na 60 lat, zdroworozsądkowo przyjęto że należy je zabezpieczać przed wstrząsami o sile do 8 st.
- W istocie zignorowano 2 trzęsienia ziemi o sile 8,4-8,5 st., które miały miejsce kilkaset km na północ.
- Rezultat jest znany: w 2011 roku elektrownia była bezbronna wobec tsunami wywołanego trzęsieniem ziemi o sile 9 st.

Holenderskie. . .

Holenderskie…

- Ok. 40 % powierzchni Holandii to depresja, w większości oddzielana od morza przez system grobli i tam.

Holenderskie…

- Ok. 40 % powierzchni Holandii to depresja, w większości oddzielana od morza przez system grobli i tam.
- Ta ochrona stale narażona jest na uszkodzenia lub zniszczenia w wyniku fal sztormowych o różnym natężeniu.

Holenderskie...

- Ok. 40 % powierzchni Holandii to depresja, w większości oddzielana od morza przez system grobli i tam.
- Ta ochrona stale narażona jest na uszkodzenia lub zniszczenia w wyniku fal sztormowych o różnym natężeniu.
- Swego czasu rząd holenderski postawił przed naukowcami zadanie określenia takiej wysokości wałów, aby prawdopodobieństwo ich przełamania w okresie roku wynosiło 0,0001.

Holenderskie...

- Ok. 40 % powierzchni Holandii to depresja, w większości oddzielana od morza przez system grobli i tam.
- Ta ochrona stale narażona jest na uszkodzenia lub zniszczenia w wyniku fal sztormowych o różnym natężeniu.
- Swego czasu rząd holenderski postawił przed naukowcami zadanie określenia takiej wysokości wałów, aby prawdopodobieństwo ich przełamania w okresie roku wynosiło 0,0001.
- Podstawą do oszacowań miały być dane z 1887 poważnych sztormów, zgromadzone w okresie 100 lat w mieście Delfzijl w północnej Holandii.

Holenderskie...

- Ok. 40 % powierzchni Holandii to depresja, w większości oddzielana od morza przez system grobli i tam.
- Ta ochrona stale narażona jest na uszkodzenia lub zniszczenia w wyniku fal sztormowych o różnym natężeniu.
- Swego czasu rząd holenderski postawił przed naukowcami zadanie określenia takiej wysokości wałów, aby prawdopodobieństwo ich przełamania w okresie roku wynosiło 0,0001.
- Podstawą do oszacowań miały być dane z 1887 poważnych sztormów, zgromadzone w okresie 100 lat w mieście Delfzijl w północnej Holandii.
- Dane są niewystarczające do pełnego, tzn. matematycznie ścisłego rozwiązania.

Holenderskie...

- Ok. 40 % powierzchni Holandii to depresja, w większości oddzielana od morza przez system grobli i tam.
- Ta ochrona stale narażona jest na uszkodzenia lub zniszczenia w wyniku fal sztormowych o różnym natężeniu.
- Swego czasu rząd holenderski postawił przed naukowcami zadanie określenia takiej wysokości wałów, aby prawdopodobieństwo ich przełamania w okresie roku wynosiło 0,0001.
- Podstawą do oszacowań miały być dane z 1887 poważnych sztormów, zgromadzone w okresie 100 lat w mieście Delfzijl w północnej Holandii.
- Dane są niewystarczające do pełnego, tzn. matematycznie ścisłego rozwiązania.
- Ale żaden bootstrap tu nie pomoże. Konieczna jest skuteczna ekstrapolacja.

Wspólny mianownik

Wspólny mianownik

- Niech $X_1, X_2, \ldots$ oznaczają wartości badanej wielkości (np. roczna maksymalna wysokość fali sztormowej w punkcie pomiarowym), mierzone w regularnych odstępach czasu. To szereg czasowy.

Wspólny mianownik

- Niech $X_1, X_2, \ldots$ oznaczają wartości badanej wielkości (np. roczna maksymalna wysokość fali sztormowej w punkcie pomiarowym), mierzone w regularnych odstępach czasu. To szereg czasowy.
- Niech

$$M_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j.$$

Wspólny mianownik

- Niech $X_1, X_2, \ldots$ oznaczają wartości badanej wielkości (np. roczna maksymalna wysokość fali sztormowej w punkcie pomiarowym), mierzone w regularnych odstępach czasu. To szereg czasowy.
- Niech
$$M_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j.$$
- Poszukujemy q-kwantyla dla M_n, czyli takiej wielkości v_n, żeby
$$\mathbb{P}(M_n \leqslant v_n) = q.$$

Wspólny mianownik

- Niech $X_1, X_2, \ldots$ oznaczają wartości badanej wielkości (np. roczna maksymalna wysokość fali sztormowej w punkcie pomiarowym), mierzone w regularnych odstępach czasu. To szereg czasowy.
- Niech
$$M_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j.$$
- Poszukujemy q-kwantyla dla M_n, czyli takiej wielkości v_n, żeby
$$\mathbb{P}(M_n \leqslant v_n) = q.$$
- Np. w „zadaniu holenderskim", w istocie poszukujemy v_{100}, które odpowiada $q = 0,99$. Rzeczywiście, jeśli $\mathbb{P}(X_j \leqslant v) = 0,9999$ i zmienne $\{X_j\}$ są niezależne i mają jednakowe rozkłady, to
$$\mathbb{P}(M_{100} \leqslant v) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant v)^{100} \approx 0,99.$$

Wspólny mianownik

- Niech $X_1, X_2, \ldots$ oznaczają wartości badanej wielkości (np. roczna maksymalna wysokość fali sztormowej w punkcie pomiarowym), mierzone w regularnych odstępach czasu. To szereg czasowy.
- Niech
$$M_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j.$$
- Poszukujemy q-kwantyla dla M_n, czyli takiej wielkości v_n, żeby
$$\mathbb{P}(M_n \leqslant v_n) = q.$$
- Np. w „zadaniu holenderskim", w istocie poszukujemy v_{100}, które odpowiada $q = 0,99$. Rzeczywiście, jeśli $\mathbb{P}(X_j \leqslant v) = 0,9999$ i zmienne $\{X_j\}$ są niezależne i mają jednakowe rozkłady, to
$$\mathbb{P}(M_{100} \leqslant v) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant v)^{100} \approx 0,99.$$
- Oczekiwania rządu holenderskiego nie były więc nierozsądnie pesymistyczne!

Kilka uwag

Kilka uwag

- Ciągi niezależnych zmiennych losowych realizują (asymptotycznie) najszybszy wzrost maksimów czyli najgorsze scenariusze.

Kilka uwag

- Ciągi niezależnych zmiennych losowych realizują (asymptotycznie) najszybszy wzrost maksimów czyli najgorsze scenariusze.
- Realne szeregi czasowe rzadko spełniają założenie niezależności, nawet w przybliżeniu.

Kilka uwag

- Ciągi niezależnych zmiennych losowych realizują (asymptotycznie) najszybszy wzrost maksimów czyli najgorsze scenariusze.
- Realne szeregi czasowe rzadko spełniają założenie niezależności, nawet w przybliżeniu.
- Znacznie bardziej realistyczne (i nadal efektywne) są założenia:

Kilka uwag

- Ciągi niezależnych zmiennych losowych realizują (asymptotycznie) najszybszy wzrost maksimów czyli najgorsze scenariusze.
- Realne szeregi czasowe rzadko spełniają założenie niezależności, nawet w przybliżeniu.
- Znacznie bardziej realistyczne (i nadal efektywne) są założenia:
    - stacjonarności (własności statystyczne szeregu czasowego nie zależą od momentu rozpoczęcia obserwacji);

Kilka uwag

- Ciągi niezależnych zmiennych losowych realizują (asymptotycznie) najszybszy wzrost maksimów czyli najgorsze scenariusze.
- Realne szeregi czasowe rzadko spełniają założenie niezależności, nawet w przybliżeniu.
- Znacznie bardziej realistyczne (i nadal efektywne) są założenia:
  - stacjonarności (własności statystyczne szeregu czasowego nie zależą od momentu rozpoczęcia obserwacji);
  - słabej zależności (odległe człony szeregu czasowego są “asymptotycznej niezależne").

Kilka uwag

- Ciągi niezależnych zmiennych losowych realizują (asymptotycznie) najszybszy wzrost maksimów czyli najgorsze scenariusze.
- Realne szeregi czasowe rzadko spełniają założenie niezależności, nawet w przybliżeniu.
- Znacznie bardziej realistyczne (i nadal efektywne) są założenia:
  - stacjonarności (własności statystyczne szeregu czasowego nie zależą od momentu rozpoczęcia obserwacji);
  - słabej zależności (odległe człony szeregu czasowego są “asymptotycznej niezależne").
- Jest interesujące, że w analizie zagadnień postaci

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leqslant v_n) = q$$

dla stacjonarnych i słabo zależnych szeregów czasowych nadal możemy stosować techniki związane z niezależnością!

Dystrybuanty pozorne

Dystrybuanty pozorne

- Pojęcie dystrybuanty pozornej wprowadził O'Brien (1987).

Dystrybuanty pozorne

- Pojęcie dystrybuanty pozornej wprowadził O'Brien (1987).
- Niech $\{X_j\}$ będzie procesem stacjonarnym z częściowymi maksimami

$$M_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j$$

i rozkładem brzegowym $F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)$.

Dystrybuanty pozorne

- Pojęcie dystrybuanty pozornej wprowadził O'Brien (1987).
- Niech $\{X_j\}$ będzie procesem stacjonarnym z częściowymi maksimami

$$M_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j$$

  i rozkładem brzegowym $F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)$.
- Mówimy, że proces stacjonarny $\{X_j\}$ ma dystrybuantę pozorną G, jeśli

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}(M_n \leqslant u) - G(u)^n \right| \to 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Dystrybuanty pozorne

- Pojęcie dystrybuanty pozornej wprowadził O'Brien (1987).
- Niech $\{X_j\}$ będzie procesem stacjonarnym z częściowymi maksimami

$$M_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j$$

i rozkładem brzegowym $F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)$.

- Mówimy, że proces stacjonarny $\{X_j\}$ ma dystrybuantę pozorną G, jeśli

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}(M_n \leqslant u) - G(u)^n \right| \to 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$

- Jest oczywiste, że G nie jest jednoznacznie określone, bo ważne jest tylko zachowanie G w prawym końcu $G_* = \sup\{x\,;\ G(x) < 1\}$.

Istnienie dystrybuant pozornych

Istnienie dystrybuant pozornych

Twierdzenie (A.J.'1993, D-J-L '2015)

Niech $\{X_j\}$ będzie procesem stacjonarnym. Następujące warunki są równoważne.

Istnienie dystrybuant pozornych

Twierdzenie (A.J.'1993, D-J-L '2015)

Niech $\{X_j\}$ będzie procesem stacjonarnym. Następujące warunki są równoważne.

- Ciąg $\{X_j\}$ posiada ciągłą dystrybuantę pozorną.

Istnienie dystrybuant pozornych

Twierdzenie (A.J.'1993, D-J-L '2015)

Niech $\{X_j\}$ będzie procesem stacjonarnym. Następujące warunki są równoważne.

- Ciąg $\{X_j\}$ posiada ciągłą dystrybuantę pozorną.
- Istnieje ciąg $\{v_n\}$ oraz liczba $\gamma \in (0,1)$ takie, że

  $$P(M_n \leqslant v_n) \to \gamma,$$

  i spełniony jest Warunek $B_\infty(v_n)$:

  $$\sup_{p,q\in\mathbb{N}} \left|P(M_{p+q} \leqslant v_n) - P(M_p \leqslant v_n)P(M_q \leqslant v_n)\right| \to 0.$$

Istnienie dystrybuant pozornych

Twierdzenie (A.J.'1993, D-J-L '2015)

Niech $\{X_j\}$ będzie procesem stacjonarnym. Następujące warunki są równoważne.

- Ciąg $\{X_j\}$ posiada ciągłą dystrybuantę pozorną.
- Istnieje ciąg $\{v_n\}$ oraz liczba $\gamma \in (0, 1)$ takie, że

  $$P(M_n \leqslant v_n) \to \gamma,$$

  i spełniony jest Warunek $B_\infty(v_n)$:

  $$\sup_{p,q \in \mathbb{N}} \left| P(M_{p+q} \leqslant v_n) - P(M_p \leqslant v_n) P(M_q \leqslant v_n) \right| \to 0.$$

Wniosek (D-J-L '2015)

Jeśli $\{X_j\}$ jest stacjonarnym ciągiem α-mieszającym z ciągłymi rozkładami brzegowymi, to posiada ciągłą dystrybuantę pozorną.

Komentarze

Komentarze

- Warunek

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \left|\mathbb{P}(M_n \leqslant u) - G(u)^n\right| \to 0, \text{ gdy } n \to \infty$$

oznacza, że asymptotyka M_n jest taka sama, jak asymptotyka maksimów ciągu niezależnych zmiennych losowych o dystrybuancie G.

Komentarze

- Warunek

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \left|\mathbb{P}(M_n \leqslant u) - G(u)^n\right| \to 0, \text{ gdy } n \to \infty$$

  oznacza, że asymptotyka M_n jest taka sama, jak asymptotyka maksimów ciągu niezależnych zmiennych losowych o dystrybuancie G.
- Problem w tym, że $G(x)$ i $F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)$ mogą być zupełnie różne.

Komentarze

- Warunek

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}(M_n \leqslant u) - G(u)^n \right| \to 0, \text{ gdy } n \to \infty$$

oznacza, że asymptotyka M_n jest taka sama, jak asymptotyka maksimów ciągu niezależnych zmiennych losowych o dystrybuancie G.

- Problem w tym, że $G(x)$ i $F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)$ mogą być zupełnie różne.

Przykład $G(x) = F(x)^{1/2}$

Niech $\{Y_j\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o dystrybuancie G i niech

$$X_j = Y_j \vee Y_{j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Wtedy $F(x) = G(x)^2$ i jeśli $v_n \nearrow G_*$, to

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant v_n) = G(v_n)^{n+1} = G(v_n)^n + o(1) = \left(F^{1/2}(v_n)\right)^n + o(1).$$

Błądzenie losowe według algorytmu Metropolisa

Błądzenie losowe według algorytmu Metropolisa

- Niech $\{Z_j\}$ będzie ciągiem „i.i.d.” z dystrybuantą rozkładu brzegowego H zadaną przez gęstość h („proposal density”), która jest symetryczna wokół 0.
- Niech $\{U_j\}$ będzie ciągiem „i.i.d.” o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$, niezależnym od $\{Z_j\}$.
- Niech $f(x)$ będzie zadaną gęstością rozkładu, który chcemy symulować („target density”).
- Rozważmy łańcuch Markowa zadany równaniem rekurencyjnym

$$X_{j+1} = X_j + Z_{j+1}\mathbf{1}\{U_{j+1} \leqslant \psi(X_j, X_j + Z_{j+1})\},$$

gdzie $\psi(x, y)$ jest określone wzorem

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \min\{f(y)/f(x), 1\} & \text{jeśli } f(x) > 0, \\ 1 & \text{jeśli } f(x) = 0. \end{cases}$$

Błądzenie losowe według algorytmu Metropolisa

- Niech $\{Z_j\}$ będzie ciągiem „i.i.d." z dystrybuantą rozkładu brzegowego H zadaną przez gęstość h („proposal density"), która jest symetryczna wokół 0.
- Niech $\{U_j\}$ będzie ciągiem „i.i.d." o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$, niezależnym od $\{Z_j\}$.
- Niech $f(x)$ będzie zadaną gęstością rozkładu, który chcemy symulować („target density").
- Rozważmy łańcuch Markowa zadany równaniem rekurencyjnym

$$X_{j+1} = X_j + Z_{j+1}\mathbf{1}\{U_{j+1} \leqslant \psi(X_j, X_j + Z_{j+1})\},$$

gdzie $\psi(x,y)$ jest określone wzorem

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \min\{f(y)/f(x), 1\} & \text{jeśli } f(x) > 0, \\ 1 & \text{jeśli } f(x) = 0. \end{cases}$$

- Jeśli prawy ogon f jest ciężki, to ciąg $\{X_j\}$ ma indeks ekstremalny $\theta = 0$ (Roberts et al. (2006)), ale nadal posiada ciągłą dystrybuantę pozorną (D-J-L '2015).

Dalsze komentarze

Dalsze komentarze

- Stwierdzenie, że $\{X_j\}$ ma indeks ekstremalny zero oznacza, że maksima M_n rosną dużo wolniej w porównaniu z przypadkiem niezależnym determinowanym przez F (oraz F^θ itd.). W szczególności informacje o F nie określają asymptotyki M_n.

Dalsze komentarze

- Stwierdzenie, że $\{X_j\}$ ma indeks ekstremalny zero oznacza, że maksima M_n rosną dużo wolniej w porównaniu z przypadkiem niezależnym determinowanym przez F (oraz F^θ itd.). W szczególności informacje o F nie określają asymptotyki M_n.
- Powszechność dystrybuant pozornych dla maksimów jest wyjątkowym zjawiskiem. Analogiczne pojęcie dla sum stacjonarnych i słabo zależnych zmiennych losowych ma bardzo ograniczonych zakres.

Dalsze komentarze

- Stwierdzenie, że $\{X_j\}$ ma indeks ekstremalny zero oznacza, że maksima M_n rosną dużo wolniej w porównaniu z przypadkiem niezależnym determinowanym przez F (oraz F^θ itd.). W szczególności informacje o F nie określają asymptotyki M_n.
- Powszechność dystrybuant pozornych dla maksimów jest wyjątkowym zjawiskiem. Analogiczne pojęcie dla sum stacjonarnych i słabo zależnych zmiennych losowych ma bardzo ograniczonych zakres.
- Konsekwencje istnienia dystrybuant pozornych wykraczają poza estetykę sformułowań odpowiednich twierdzeń!

Dalsze komentarze

- Stwierdzenie, że $\{X_j\}$ ma indeks ekstremalny zero oznacza, że maksima M_n rosną dużo wolniej w porównaniu z przypadkiem niezależnym determinowanym przez F (oraz F^θ itd.). W szczególności informacje o F nie określają asymptotyki M_n.
- Powszechność dystrybuant pozornych dla maksimów jest wyjątkowym zjawiskiem. Analogiczne pojęcie dla sum stacjonarnych i słabo zależnych zmiennych losowych ma bardzo ograniczonych zakres.
- Konsekwencje istnienia dystrybuant pozornych wykraczają poza estetykę sformułowań odpowiednich twierdzeń! Zachodzi bowiem

Dalsze komentarze

- Stwierdzenie, że $\{X_j\}$ ma indeks ekstremalny zero oznacza, że maksima M_n rosną dużo wolniej w porównaniu z przypadkiem niezależnym determinowanym przez F (oraz F^θ itd.). W szczególności informacje o F nie określają asymptotyki M_n.
- Powszechność dystrybuant pozornych dla maksimów jest wyjątkowym zjawiskiem. Analogiczne pojęcie dla sum stacjonarnych i słabo zależnych zmiennych losowych ma bardzo ograniczonych zakres.
- Konsekwencje istnienia dystrybuant pozornych wykraczają poza estetykę sformułowań odpowiednich twierdzeń! Zachodzi bowiem

Fakt godny uwagi

Asymptotyka rozkładów maksimów M_n ciągów stacjonarnych i słabo zależnych jest w pełni określona przez pojedynczy ciąg poziomów v_n!

Równoważność dystrybuant ze względu na maksima

Równoważność dystrybuant ze względu na maksima

Obserwacja

Równoważność dystrybuant ze względu na maksima

Obserwacja

Niech dystrybuanta G będzie regularna, tzn. spełnia

$$G(G_*-) = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \to G_*-} \frac{1 - G(x-)}{1 - G(x)} = 1.$$

Równoważność dystrybuant ze względu na maksima

Obserwacja

Niech dystrybuanta G będzie regularna, tzn. spełnia

$$G(G_*-) = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \to G_*-} \frac{1 - G(x-)}{1 - G(x)} = 1.$$

Dla dowolnej dystrybuanty H następujące warunki są równoważne.

Równoważność dystrybuant ze względu na maksima

Obserwacja

Niech dystrybuanta G będzie regularna, tzn. spełnia

$$G(G_*-) = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to G_*-} \frac{1-G(x-)}{1-G(x)} = 1.$$

Dla dowolnej dystrybuanty H następujące warunki są równoważne.

- $$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|G(x)^n - H(x)^n\right| \to 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Równoważność dystrybuant ze względu na maksima

Obserwacja

Niech dystrybuanta G będzie regularna, tzn. spełnia

$$G(G_*-) = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \to G_*-} \frac{1 - G(x-)}{1 - G(x)} = 1.$$

Dla dowolnej dystrybuanty H następujące warunki są równoważne.

- $$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| G(x)^n - H(x)^n \right| \to 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$
- Istnieje $\gamma \in (0, 1)$ i niemalejący ciąg $\{v_n\}$ taki, że

$$G(v_n)^n \to \gamma, \quad H(v_n)^n \to \gamma.$$

Równoważność dystrybuant ze względu na maksima

Obserwacja

Niech dystrybuanta G będzie regularna, tzn. spełnia

$$G(G_*-) = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \to G_*-} \frac{1 - G(x-)}{1 - G(x)} = 1.$$

Dla dowolnej dystrybuanty H następujące warunki są równoważne.

- $$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| G(x)^n - H(x)^n \right| \to 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$
- Istnieje $\gamma \in (0,1)$ i niemalejący ciąg $\{v_n\}$ taki, że
$$G(v_n)^n \to \gamma, \quad H(v_n)^n \to \gamma.$$
- H jest regularna i ma ogon równoważny z G, tj.
$$G_* = H_* \quad \text{oraz} \quad \frac{1 - H(x)}{1 - G(x)} \to 1, \text{ gdy } x \to G_*-.$$

Kluczowe uwagi

Kluczowe uwagi

- W tradycyjnym podejściu badano granice

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((M_n - b_n)/a_n \leqslant x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((M_n \leqslant a_n x + b_n),$$

dla rodziny poziomów $v_n(x) = a_n x + b_n$, $x \in \mathbb{R}^1$.

Kluczowe uwagi

- W tradycyjnym podejściu badano granice

  $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((M_n - b_n)/a_n \leqslant x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((M_n \leqslant a_n x + b_n),$$

  dla rodziny poziomów $v_n(x) = a_n x + b_n$, $x \in \mathbb{R}^1$.
- Prowadziło to do granicznych rozkładów max-stabilnych, obszarów przyciągania itp.

Kluczowe uwagi

- W tradycyjnym podejściu badano granice

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((M_n - b_n)/a_n \leqslant x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((M_n \leqslant a_n x + b_n),$$

  dla rodziny poziomów $v_n(x) = a_n x + b_n$, $x \in \mathbb{R}^1$.
- Prowadziło to do granicznych rozkładów max-stabilnych, obszarów przyciągania itp.
- Okazuje się, że wystarczy znaleźć granicę $\gamma \in (0,1)$ dla jednego ciągu poziomów $v_n = a_n x_0 + b_n$!

Kluczowe uwagi

- W tradycyjnym podejściu badano granice

  $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((M_n - b_n)/a_n \leqslant x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((M_n \leqslant a_n x + b_n),$$

  dla rodziny poziomów $v_n(x) = a_n x + b_n$, $x \in \mathbb{R}^1$.
- Prowadziło to do granicznych rozkładów max-stabilnych, obszarów przyciągania itp.
- Okazuje się, że wystarczy znaleźć granicę $\gamma \in (0,1)$ dla jednego ciągu poziomów $v_n = a_n x_0 + b_n$!
- Z naszej teorii wynika, że również w dużo obszerniejszej klasie stacjonarnych i słabo zależnych ciągów zmiennych losowych wystarczy estymować jeden ciąg v_n spełniający

  $$\mathbb{P}(M_n \leqslant v_n) = G(v_n)^n + o(1) \to \gamma \in (0,1), \text{ gdy } n \to \infty.$$

Kluczowe uwagi

- W tradycyjnym podejściu badano granice

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((M_n - b_n)/a_n \leqslant x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((M_n \leqslant a_n x + b_n),$$

  dla rodziny poziomów $v_n(x) = a_n x + b_n$, $x \in \mathbb{R}^1$.
- Prowadziło to do granicznych rozkładów max-stabilnych, obszarów przyciągania itp.
- Okazuje się, że wystarczy znaleźć granicę $\gamma \in (0,1)$ dla jednego ciągu poziomów $v_n = a_n x_0 + b_n$!
- Z naszej teorii wynika, że również w dużo obszerniejszej klasie stacjonarnych i słabo zależnych ciągów zmiennych losowych wystarczy estymować jeden ciąg v_n spełniający

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant v_n) = G(v_n)^n + o(1) \to \gamma \in (0,1), \text{ gdy } n \to \infty.$$

- Trzeba tylko pamiętać, że F i G nie muszą mieć wiele wspólnego., więc istotne dla kształtu ogona G będą dopiero „odległe" v_n.

Kluczowe uwagi

Kluczowe uwagi

- Niekiedy ciąg v_n mamy dany „za darmo”.

Kluczowe uwagi

- Niekiedy ciąg v_n mamy dany „za darmo”.
- Jeśli np. rozkłady brzegowe $\{X_j\}$ są ciągłe, wtedy wystarczy estymować medianę lub trzeci kwartyl M_n, co prowadzi do

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant v_n) \to \gamma = 1/2 \ \text{(lub 3/4)}.$$

Kluczowe uwagi

- Niekiedy ciąg v_n mamy dany „za darmo”.
- Jeśli np. rozkłady brzegowe $\{X_j\}$ są ciągłe, wtedy wystarczy estymować medianę lub trzeci kwartyl M_n, co prowadzi do

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant v_n) \to \gamma = 1/2 \ \ \text{(lub 3/4)}.$$

- Takie podejście pozbawione jest podstawowej słabości metody „peaks-over-threshold (POT)", która polega na ograniczeniu analizy do nielicznych danych o wartościach bliskich G_*.

Kluczowe uwagi

- Niekiedy ciąg v_n mamy dany „za darmo”.
- Jeśli np. rozkłady brzegowe $\{X_j\}$ są ciągłe, wtedy wystarczy estymować medianę lub trzeci kwartyl M_n, co prowadzi do

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant v_n) \to \gamma = 1/2 \text{ (lub 3/4).}$$

- Takie podejście pozbawione jest podstawowej słabości metody „peaks-over-threshold (POT)", która polega na ograniczeniu analizy do nielicznych danych o wartościach bliskich G_*.
- Estymując pewien odcinek $v_{m_0}, v_{m_0+1}, \ldots, v_{n_0}$

Kluczowe uwagi

- Niekiedy ciąg v_n mamy dany „za darmo”.
- Jeśli np. rozkłady brzegowe $\{X_j\}$ są ciągłe, wtedy wystarczy estymować medianę lub trzeci kwartyl M_n, co prowadzi do

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant v_n) \to \gamma = 1/2 \text{ (lub 3/4).}$$

- Takie podejście pozbawione jest podstawowej słabości metody „peaks-over-threshold (POT)", która polega na ograniczeniu analizy do nielicznych danych o wartościach bliskich G_*.
- Estymując pewien odcinek $v_{m_0}, v_{m_0+1}, \ldots, v_{n_0}$ możemy pokusić się o „dopasowanie” zależności $v_n = f(n)$,

Kluczowe uwagi

- Niekiedy ciąg v_n mamy dany „za darmo”.
- Jeśli np. rozkłady brzegowe $\{X_j\}$ są ciągłe, wtedy wystarczy estymować medianę lub trzeci kwartyl M_n, co prowadzi do

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant v_n) \to \gamma = 1/2 \ \ \text{(lub 3/4).}$$

- Takie podejście pozbawione jest podstawowej słabości metody „peaks-over-threshold (POT)", która polega na ograniczeniu analizy do nielicznych danych o wartościach bliskich G_*.
- Estymując pewien odcinek $v_{m_0}, v_{m_0+1}, \ldots, v_{n_0}$ możemy pokusić się o „dopasowanie” zależności $v_n = f(n)$, co z kolei prowadzi do ekstrapolacji wysokiego kwantyla, zgodnie z wzorem

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant f([(n \ln \gamma)/\ln q])) \to q.$$

Kluczowe uwagi

- Niekiedy ciąg v_n mamy dany „za darmo”.
- Jeśli np. rozkłady brzegowe $\{X_j\}$ są ciągłe, wtedy wystarczy estymować medianę lub trzeci kwartyl M_n, co prowadzi do

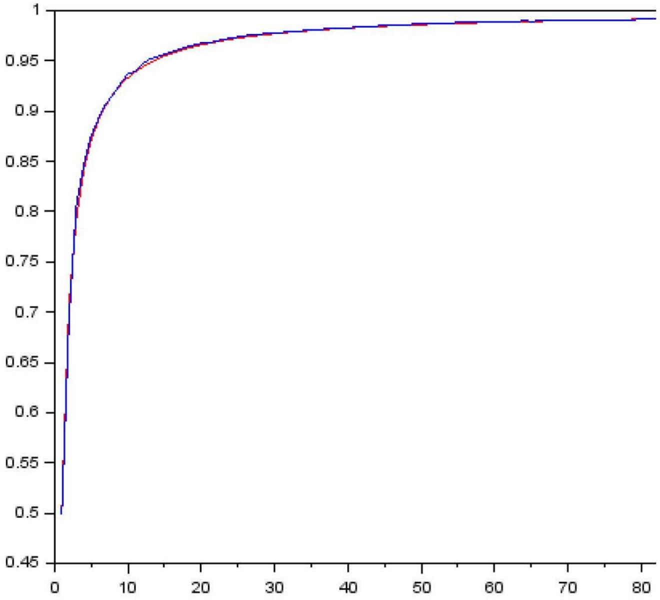
$$\mathbb{P}(M_n \leqslant v_n) \to \gamma = 1/2 \ \text{(lub 3/4)}.$$

- Takie podejście pozbawione jest podstawowej słabości metody „peaks-over-threshold (POT)", która polega na ograniczeniu analizy do nielicznych danych o wartościach bliskich G_*.
- Estymując pewien odcinek $v_{m_0}, v_{m_0+1}, \ldots, v_{n_0}$ możemy pokusić się o „dopasowanie” zależności $v_n = f(n)$, co z kolei prowadzi do ekstrapolacji wysokiego kwantyla, zgodnie z wzorem

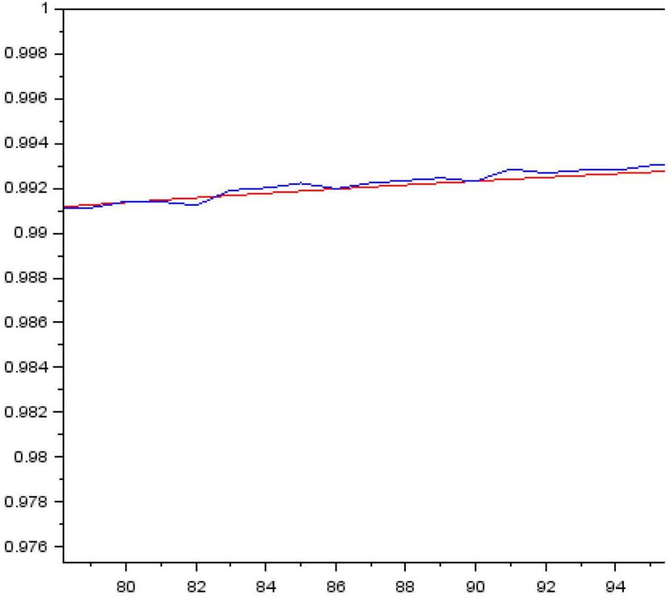
$$\mathbb{P}(M_n \leqslant f([(n \ln \gamma)/\ln q])) \to q.$$

- Wierzymy, że w strefach bliskich G_* nie nastąpi zmiana zasad, którymi rządzi się badane zjawisko.

Symulacja kliniczna



Symulacja kliniczna



Dystrybuanty pozorne w wielu wymiarach

Dystrybuanty pozorne w wielu wymiarach

- Czy istnieje podobna teoria dla maksimów wektorów losowych w $\mathbb{R}^d$?

Dystrybuanty pozorne w wielu wymiarach

- Czy istnieje podobna teoria dla maksimów wektorów losowych w $\mathbb{R}^d$?
- Rozważmy dla prostoty $d = 2$.

Dystrybuanty pozorne w wielu wymiarach

- Czy istnieje podobna teoria dla maksimów wektorów losowych w $\mathbb{R}^d$?
- Rozważmy dla prostoty $d = 2$.
- Definicja jest oczywista: G jest dystrybuantą pozorną dla ciagu stacjonarnego wektorów losowych

$$(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}), (X_2^{(1)}, X_2^{(2)}), (X_3^{(1)}, X_3^{(2)}), \ldots$$

z częściowymi maksimami

$$\mathbf{M}_n = (M_n^{(1)}, M_n^{(2)}) = (\max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j^{(1)}, \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j^{(2)}),$$

jeśli

$$\sup_{\mathbf{u}=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2} \left| P(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{u}) - G^n(\mathbf{u}) \right| \to 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Dystrybuanty pozorne w wielu wymiarach

- Czy istnieje podobna teoria dla maksimów wektorów losowych w $\mathbb{R}^d$?
- Rozważmy dla prostoty $d = 2$.
- Definicja jest oczywista: G jest dystrybuantą pozorną dla ciagu stacjonarnego wektorów losowych

$$(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}), (X_2^{(1)}, X_2^{(2)}), (X_3^{(1)}, X_3^{(2)}), \ldots$$

z częściowymi maksimami

$$\mathbf{M}_n = (M_n^{(1)}, M_n^{(2)}) = (\max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j^{(1)}, \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j^{(2)}),$$

jeśli

$$\sup_{\mathbf{u}=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2} \Big| P(\mathbf{M}_n \leqslant \mathbf{u}) - G^n(\mathbf{u}) \Big| \to 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$

- W istocie wygodniej jest rozpatrywać sup nad $\overline{\mathbb{R}}^2$!

Działamy podobnie jak R. Perfekt (1997), ale według własnego schematu

Działamy podobnie jak R. Perfekt (1997), ale według własnego schematu

- Znajdujemy $v_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, takie, że

$$P(M_n^1 \leqslant v_n^{(1)}) \to \rho_1 \in (0, 1), P(M_n^2 \leqslant v_n^{(2)}) \to \rho_2 \in (0, 1).$$

Działamy podobnie jak R. Perfekt (1997), ale według własnego schematu

- Znajdujemy $v_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, takie, że

  $$P(M_n^1 \leqslant v_n^{(1)}) \to \rho_1 \in (0,1), P(M_n^2 \leqslant v_n^{(2)}) \to \rho_2 \in (0,1).$$

- Załóżmy $B_\infty(v_n^{(1)})$ dla $\{X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots\}$ oraz $B_\infty(v_n^{(2)})$ dla $\{X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \ldots\}$.

Działamy podobnie jak R. Perfekt (1997), ale według własnego schematu

- Znajdujemy $v_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, takie, że

  $$P(M_n^1 \leqslant v_n^{(1)}) \to \rho_1 \in (0,1), P(M_n^2 \leqslant v_n^{(2)}) \to \rho_2 \in (0,1).$$

- Załóżmy $B_\infty(v_n^{(1)})$ dla $\{X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots\}$ oraz $B_\infty(v_n^{(2)})$ dla $\{X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \ldots\}$.
- Wtedy dla $i = 1, 2$

  $$P(M_n^{(i)} \leqslant v_{[ns_i]}^{(i)}) \to \rho_i^{1/s_i}$$

  jeśli $s_i \in [0, +\infty]$.

Działamy podobnie jak R. Perfekt (1997), ale według własnego schematu

Działamy podobnie jak R. Perfekt (1997), ale według własnego schematu

- Dla $\mathbf{s} \in [0, +\infty]^2$ określamy

$$v_n(\mathbf{s}) = \left(v^{(1)}_{[ns_1]}, v^{(2)}_{[ns_2]}\right).$$

Działamy podobnie jak R. Perfekt (1997), ale według własnego schematu

- Dla $\mathbf{s} \in [0, +\infty]^2$ określamy

$$v_n(\mathbf{s}) = \big(v^{(1)}_{[ns_1]}, v^{(2)}_{[ns_2]}\big).$$

- Rozważmy

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{s} \in [1, +\infty)^2\,;\; s_1 \wedge s_2 = 1\}.$$

Działamy podobnie jak R. Perfekt (1997), ale według własnego schematu

- Dla $\mathbf{s} \in [0, +\infty]^2$ określamy
$$v_n(\mathbf{s}) = \left(v^{(1)}_{[ns_1]}, v^{(2)}_{[ns_2]}\right).$$
- Rozważmy
$$\mathcal{L} = \{\mathbf{s} \in [1, +\infty)^2\,;\, s_1 \wedge s_2 = 1\}.$$
- Przypuśćmy, że dla pewnego $\rho : \mathcal{L} \to (0, 1)$
$$P\left(\mathbf{M}_n \leqslant v_n(\mathbf{s})\right) \to \rho(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \mathcal{L}.$$

Działamy podobnie jak R. Perfekt (1997), ale według własnego schematu

- Dla $\mathbf{s} \in [0, +\infty]^2$ określamy

$$v_n(\mathbf{s}) = \big(v^{(1)}_{[ns_1]}, v^{(2)}_{[ns_2]}\big).$$

- Rozważmy

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{s} \in [1, +\infty)^2\,;\, s_1 \wedge s_2 = 1\}.$$

- Przypuśćmy, że dla pewnego $\rho : \mathcal{L} \to (0, 1)$

$$P\big(\mathbf{M}_n \leqslant v_n(\mathbf{s})\big) \to \rho(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \mathcal{L}.$$

- Przypuśćmy, że $B_\infty(v_n(\mathbf{s}))$ jest spełniony dla każdego $\mathbf{s} \in \mathcal{L}$.

Działamy podobnie jak R. Perfekt (1997), ale według własnego schematu

- Dla $\mathbf{s} \in [0, +\infty]^2$ określamy

$$v_n(\mathbf{s}) = \left(v^{(1)}_{[ns_1]}, v^{(2)}_{[ns_2]}\right).$$

- Rozważmy

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{s} \in [1, +\infty)^2\, ; \, s_1 \wedge s_2 = 1\}.$$

- Przypuśćmy, że dla pewnego $\rho : \mathcal{L} \to (0, 1)$

$$P\big(\mathbf{M}_n \leqslant v_n(\mathbf{s})\big) \to \rho(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \mathcal{L}.$$

- Przypuśćmy, że $B_\infty(v_n(\mathbf{s}))$ jest spełniony dla każdego $\mathbf{s} \in \mathcal{L}$.

Twierdzenie

Działamy podobnie jak R. Perfekt (1997), ale według własnego schematu

- Dla $\mathbf{s} \in [0, +\infty]^2$ określamy

$$v_n(\mathbf{s}) = \big(v^{(1)}_{[ns_1]}, v^{(2)}_{[ns_2]}\big).$$

- Rozważmy

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{s} \in [1, +\infty)^2\,;\, s_1 \wedge s_2 = 1\}.$$

- Przypuśćmy, że dla pewnego $\rho : \mathcal{L} \to (0, 1)$

$$P\big(\mathbf{M}_n \leqslant v_n(\mathbf{s})\big) \to \rho(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \mathcal{L}.$$

- Przypuśćmy, że $B_\infty(v_n(\mathbf{s}))$ jest spełniony dla każdego $\mathbf{s} \in \mathcal{L}$.

Twierdzenie

- Warunek $B_\infty(v_n(\mathbf{s}))$ jest spełniony dla każdego $\mathbf{s} \in [0, +\infty]$.

Działamy podobnie jak R. Perfekt (1997), ale według własnego schematu

- Dla $\mathbf{s} \in [0, +\infty]^2$ określamy

$$v_n(\mathbf{s}) = \big(v^{(1)}_{[ns_1]}, v^{(2)}_{[ns_2]}\big).$$

- Rozważmy

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{s} \in [1, +\infty)^2\,;\; s_1 \wedge s_2 = 1\}.$$

- Przypuśćmy, że dla pewnego $\rho : \mathcal{L} \to (0, 1)$

$$P(\mathbf{M}_n \leqslant v_n(\mathbf{s})) \to \rho(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \mathcal{L}.$$

- Przypuśćmy, że $B_\infty(v_n(\mathbf{s}))$ jest spełniony dla każdego $\mathbf{s} \in \mathcal{L}$.

Twierdzenie

- Warunek $B_\infty(v_n(\mathbf{s}))$ jest spełniony dla każdego $\mathbf{s} \in [0, +\infty]$.
- Istnieje $H : [0, +\infty]^2 \to [0, 1]$ takie, że

$$P(\mathbf{M}_n \leqslant v_n(\mathbf{s})) \to H(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in [0, +\infty]^2.$$

Postać $H(s)$

Postać $H(\mathbf{s})$

Twierdzenie

Funkcja $H(\mathbf{s})$, określona na $[0, +\infty)^2$, jest dystrybuantą dwuwymiarowego rozkładu ekstremalnego („extreme value distribution”).

Postać $H(\mathbf{s})$

Twierdzenie

Funkcja $H(\mathbf{s})$, określona na $[0, +\infty)^2$, jest dystrybuantą dwuwymiarowego rozkładu ekstremalnego („extreme value distribution”).

Co więcej, jeśli $H^{(1)}$ i $H^{(2)}$ są rozkładami brzegowymi $H(\mathbf{s})$, to

$$H^{(i)}((-\log \rho_i)s) = G_{2,1}(s), i = 1, 2,$$

gdzie $G_{2,1}(s)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu ekstremalnego Frécheta.

Dystrybuanta pozorna dla wektorów losowych

Dystrybuanta pozorna dla wektorów losowych

Twierdzenie

$$G(\mathbf{x}) = H(\mathbf{n}(\mathbf{x})),$$

gdzie

$$n_i(\mathbf{x}) = \sup\{n \in \mathbb{N}\,;\; v_n^{(i)} \leqslant x_i\}, \quad i = 1, 2,$$

jest dystrybuantą pozorną dla $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$.