Adaptacja i jej potencjalne przewagi w obliczeniach numerycznych

Bolesław Kacewicz

Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków
Wydział Matematyki Stosowanej

Niech

$$f : [a, b] \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$$

będzie kawałkami regularną lub regularną funkcją, $\quad f \in F$.

Rozpatruje się w analizie numerycznej różne problemy obliczeniowe związane z f, np.

– aproksymacja f: rozwiązanie $z = f$

– całkowanie f : rozwiązanie

$$z = \int_a^b f(t)\, dt$$

– rozwiązanie problemu początkowego:

$$z'(t) = f(t, z(t)), \quad t \in [a, b], \quad z(a) = \eta.$$

Rozwiązywanie problemów brzegowych dla RRCz

... masa innych

Cel w Information Based Complexity: 'optymalne' przybliżenie z dla $f \in F$ – tu model obliczeniowy, koszt itd.

Potrzebna informacja o f:

$$N_n(f) = [L_1(f), L_2(f), \dots, L_n(f)]$$

Adaptacja: funkcjonały mogą być wybierane na podstawie poprzednio obliczonych wartości

Powszechnie stosowana od zawsze w analizie numerycznej: kwadratury adaptacyjne, adaptacyjne siatki dla RRZ i RRCz ... itd.
Tu: dwa konteksty – f kawałkami regularna (zapobieżenie utracie rzędu metody) lub f regularna (poprawa efektywności)

Najpierw: f kawałkami regularna.

Zastosowania: przetwarzanie obrazów, automatyka, biologia, problemy inżynierskie, fizyka ...

Zwykle dużo wiadomo o problemach globalnie regularnych

Porównanie z kawałkami regularnymi – standardowe metody tracą rząd zbieżności

Klasa F problemów nie ma pewnych własności jak np. wypukłości

Wynik klasyczny w IBC (Traub, Woźniakowski):

Jeśli zadanie jest liniowe (np. całkowanie), klasa F jest wypukła i centralnie symetryczna, to adaptacja w najgorszym przypadku może być lepsza co najwyżej 2x

Krótki dowód. Niektórzy numerycy zgadzali się z założeniami i dowodem, ale nie zgadzali się z tezą (??).
Klasyczne metody adaptacyjne – rozwiązania heurystyczne (często bardzo sensowne)

IBC: seria prac o tym, kiedy adaptacja jest lepsza (Huerta dla całkowania 1986), a kiedy nie (model średni)

Aproksymacja funkcji kawałkami regularnych

Arandiga, Cohen, Donat, Dyn (2005) – ścisłe podejście

F - funkcje ciągłe klasy C^r poza dokładnie jednym punktem, gdzie f' ma (dokładnie jedną, nieznaną) nietrywialną nieciągłość s_f

Propozycja metody adaptacyjnej. Wynik:

$$\|f-l\|_{L^\infty} \leqslant Ch^r \sup_{x\in\mathbf{R}\setminus\{s_f\}} |f^{(r)}(x)|, \quad h \leqslant h_c$$

h_c- graniczna 'skala'

$$\|f-l\|_{L^\infty} \leqslant Ch^2 \sup_{x\in\mathbf{R}\setminus\{s_f\}} |f''(x)|, \quad h > 0$$

Wady:

– $h_c \to 0$ gdy skok $\Delta_{f'} \to 0$

– s_f musi być przybliżona z dużą dokładnością

Dla całkowania i aproksymacji Plaskota i Wasilkowski (2005) zauważyli, że punkt 'osobliwości' nie musi być przybliżany bardzo dokładnie

F - klasa funkcji klasy C^r z wyjątkiem nieznanego punktu 'osobliwego' s_f

Metoda adaptacyjna Q_n^* korzystająca z n wartości f:

Wynik

- Dla każdej nieadaptacyjnej metody Q_n błąd najgorszego przypadku w klasie $F = \Omega(n^{-1})$
- Dla Q_n^*:

  błąd najgorszego przypadku w klasie $F = O(n^{-r})$

Podobnie dla aproksymacji Plaskota, Wasilkowski, Zhao (2008)

Problemy początkowe

$$z'(t) = f(t, z(t)), \quad t \in [a, b], \qquad z(a) = \eta$$

klasa f: $F = F^{r,\varrho}$ – funkcje (r, ϱ)- gładkie

- f - globalnie ciągłe (niekoniecznie)

- $$f(t, y) = \begin{cases} f_+(t, y), \text{ gdy } H(t, y) \geqslant 0, \\ f_-(t, y), \text{ gdy } H(t, y) < 0, \end{cases}$$

  dla pewnych (r, ϱ)- gładkich f_-, f_+ i C^1-gładkiej funkcji H (nieznanej).

  Utrata regularności na hiperpowierzchni

- warunek transwersalności , $G > 0$

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial H}{\partial y}(t, y) f(t, y) \geqslant G.$$

Co najwyżej jeden (nieznany) punkt przejścia przez hiperpowierzchnię dla rozwiązania z,

$$H(t, z(t)) = 0$$

Mannshardt (1978) - znana funkcja H, brak analizy kosztu

Gear,$\oslash$sterby (1984) - H nieznana, heureza

Dieci, Lopez (2012) - przegląd wyników dla IVPs z 'osobliwościami' - dużo heurezy, często brak twierdzeń o zbieżności, wiele pożytecznych pomysłów praktycznych

Podejście ścisłe: argumenty heurystyczne nie są dozwolone (w algorytmach i dowodach)

Cel: stworzenie algorytmów zachowujących rząd zbieżności jak dla funkcji globalnie regularnych, przy nieznanej hiperpowierzchni H

Seria prac Kacewicz, Przybyłowicz (2008, 2014, 2015), Kacewicz (2015)

Wyniki:

Potrafimy skonstruować algorytmy o błędzie tego samego rzędu jak dla funkcji regularnych. Dla nieznanej funkcji H, przy użyciu n kawałków informacji o f (wartości funkcji f)

$$\text{Błąd najgorszego przypadku } = \Theta\left(n^{-(r+\varrho)}\right),$$

przy $n \to \infty$.

Lokalizacja osobliwości przy nieznanej funkcji H, kryterium decyzyjne, przejście przez osobliwość

brak heurezy, algorytmy są zaimplementowane (Goćwin 2015)

adaptacyjne siatki (i w związku z tym adaptacyjna informacja)

Dla problemów kawałkami regularnych celem jest zachowanie szybkości zbieżności znanej dla funkcji globalnie regularnych

Co dają siatki adaptacyjne dla funkcji regularnych?
Wiadomo, że nie poprawiają szybkości zbieżności, ale są powszechnie stosowane przez praktyków.

Znów: często argumenty i kryteria heurystyczne w definicji siatek adaptacyjnych (całkowanie, IVPs, PDEs)

Ścisłe podejście do adaptacyjnych siatek dla całkowania – funkcje klasy C^4, złożona kwadratura Simpsona: Plaskota (2015)

Adaptacyjne siatki poprawiają stałą zbieżności – analiza ilościowa.

Podobna obserwacja dla zadania aproksymacji dla funkcji klasy $W^{2,\infty}$ – Hickernell ze współautorami (2017)

Problemy początkowe dla równań zwyczajnych

$$z'(t) = f(t, z(t)), \quad t \in [a, b], \quad z(a) = \eta$$

klasa f – funkcje klasy C^r

Informacja o f: n wartości funkcji f w punktach

Błąd badamy indywidualnie dla f w normie sup w $[a, b]$

Wiadomo, że najlepsza zbieżność algorytmu jest rzędu n^{-r}

Informacja musi być adaptacyjna, siatka może być jednostajna

Siatki adaptacyjne są powszechnie stosowane – różne sposoby doboru (heureza)

Gdzie leży zysk? Jak oszacować koszt?

2017 BK:

zadanie skalarne autonomiczne – cel: dla danego $\varepsilon > 0$ skonstruować siatkę adaptacyjną, by maksymalny błąd lokalny nie przekraczał ε (bez heurezy), algorytm i analiza kosztu

Algorytm – i-ty krok czasowy $(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \to (\hat{x}_{i+1}, \hat{y}_{i+1})$

Oblicz różnicę dzieloną $d_r^i = (1/f)[\bar{z}_0^i, \bar{z}_1^i, \ldots, \bar{z}_r^i]$,
gdzie $\bar{z}_j^i$ są punktami równoodległymi w $[\hat{y}_i, \hat{y}_i + \varepsilon^{1/(r+1)}]$;
Oblicz $\hat{c}_i = 2^{r+1}|d_r^i| f(\hat{y}_i)^{r+2}$
i $\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + 2/\left(2|C_r|\,\hat{c}_i\right)^{1/(r+1)} \varepsilon^{1/(r+1)}$ $\quad$ (C_r – dane) ;
Jeśli $\hat{x}_{i+1} \geqslant b$ to $\hat{x}_{i+1} := b$;
Oblicz pewien wielomian interpolacyjny $\hat{g}_i^1$ dla węzłów zależnych od $\hat{y}_i$, $\hat{x}_{i+1}$ i funkcję $\hat{F}^1$;
Oblicz metodą bisekcji przybliżenie $\hat{y}_{i+1}$ pierwiastka r-nia $\hat{F}^1(y) = \hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i$
(l_i kroków startując z danego przedziału z danym l_i) ;

Gdzie zysk z adaptacyjnej siatki?

$m(\varepsilon)$ – liczba konstruowanych podprzedziałów, aby osiągnąć max błąd lokalny $\leqslant \varepsilon$: dla siatki adaptacyjnej lub równomiernej

$$m(\varepsilon) = \Theta\left(\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/(r+1)}\right).$$

Rząd ten sam, ale może być znacznie mniejsza stała !

Dla siatki jednostajnej stała zależy od globalnych oszacowań pochodnych rozwiązania w $[a, b]$.

Siatka adaptacyjna dostosowuje się do lokalnego zachowania pochodnych.

Zysk w stałej może być b. istotny.

Analiza algorytmu korzysta z własności r-ń skalarnych autonomicznych.

Układy ??

Inna technika – można uzyskać wyniki dla adaptacji – praca w przygotowaniu Kacewicz (2017)

Podsumowanie

– adaptacja to nie to samo co adaptacyjne siatki

– dla problemów kawałkami regularnych adaptacyjne siatki pozwalają zachować rząd zbieżności

– dla problemów regularnych pozwalają dla pewnych funkcji zmiejszyć stałą zbieżności

– ścisła analiza (bez heurezy) pożądana (i możliwa)