XXX-lecie IMSiM
20-22 kwietnia 2017, Warszawa

III problemy otwarte na XXX-lecie IMSiM

Jacek Miękisz
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Akt 1   Kwazikryształy

Nobel z chemii 2011
Dan Shechtman

David Hilbert   1862 - 1943

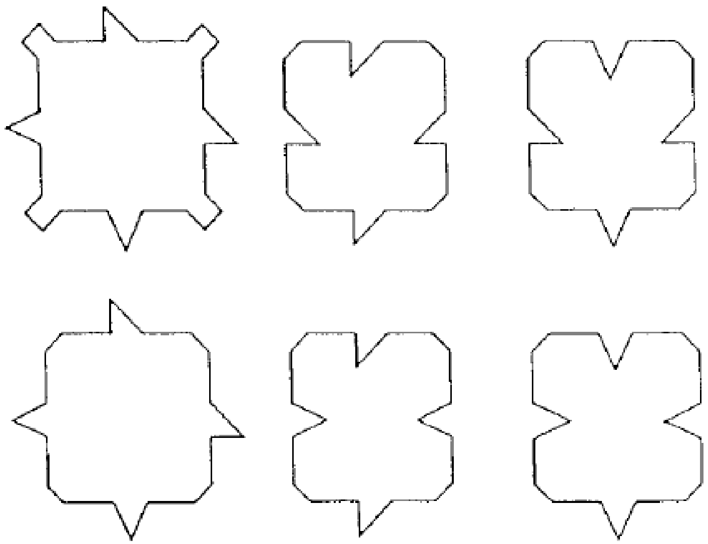
23 problemy, 1900 rok

Problem 18   część druga

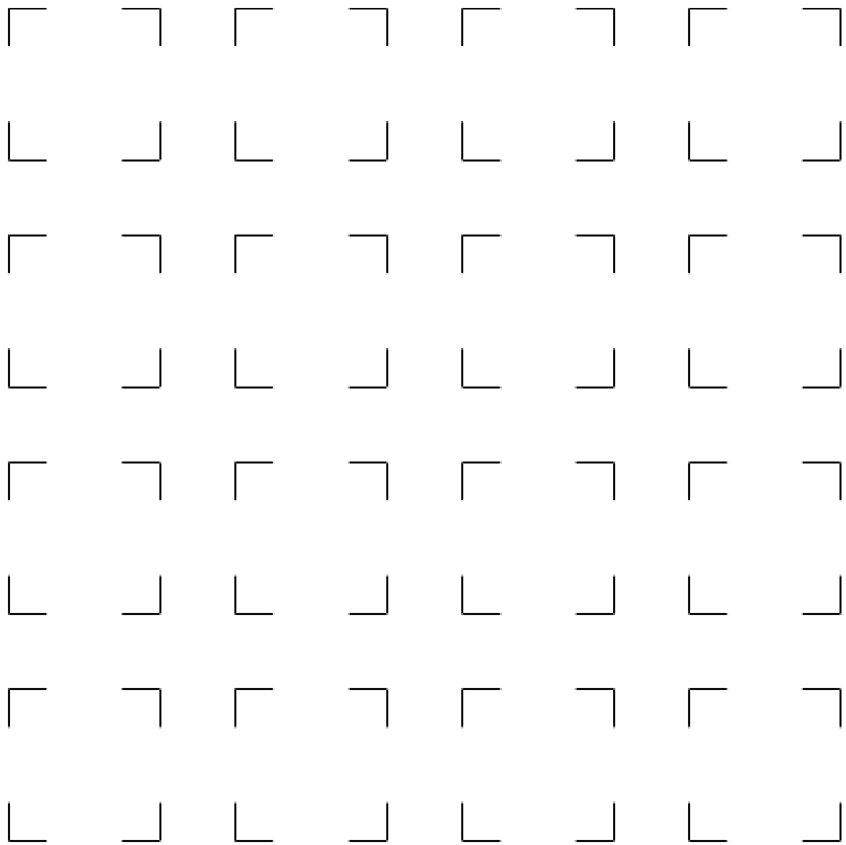
Czy istnieje wielościan, którym można pokryć przestrzeń
ale TYLKO w sposób nieokresowy ?

Raphael Robinson 1911 - 1995

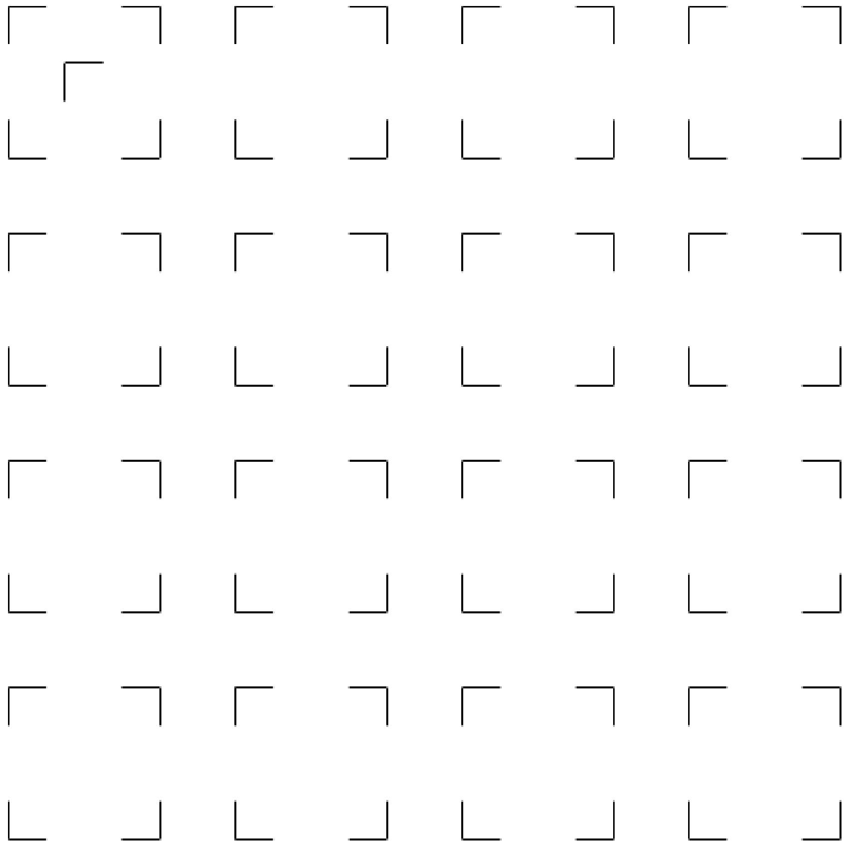
6 (56) kafelków, którymi można pokryć płaszczyznę
ale tylko w sposób nieokresowy,   1971



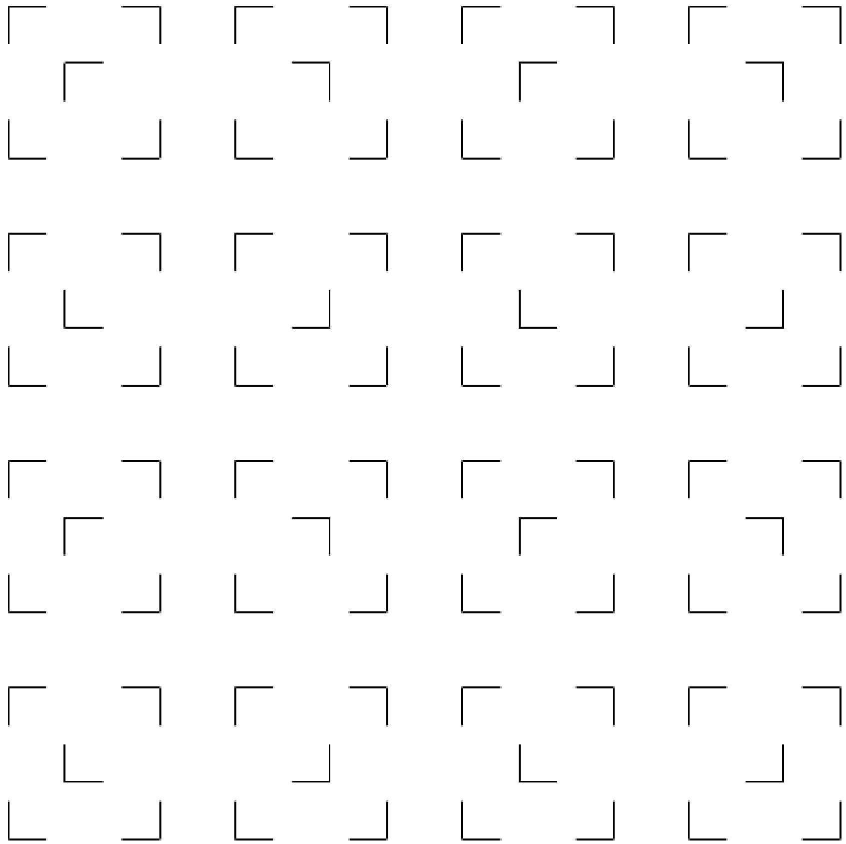
Struktura nieskończonej mozaiki



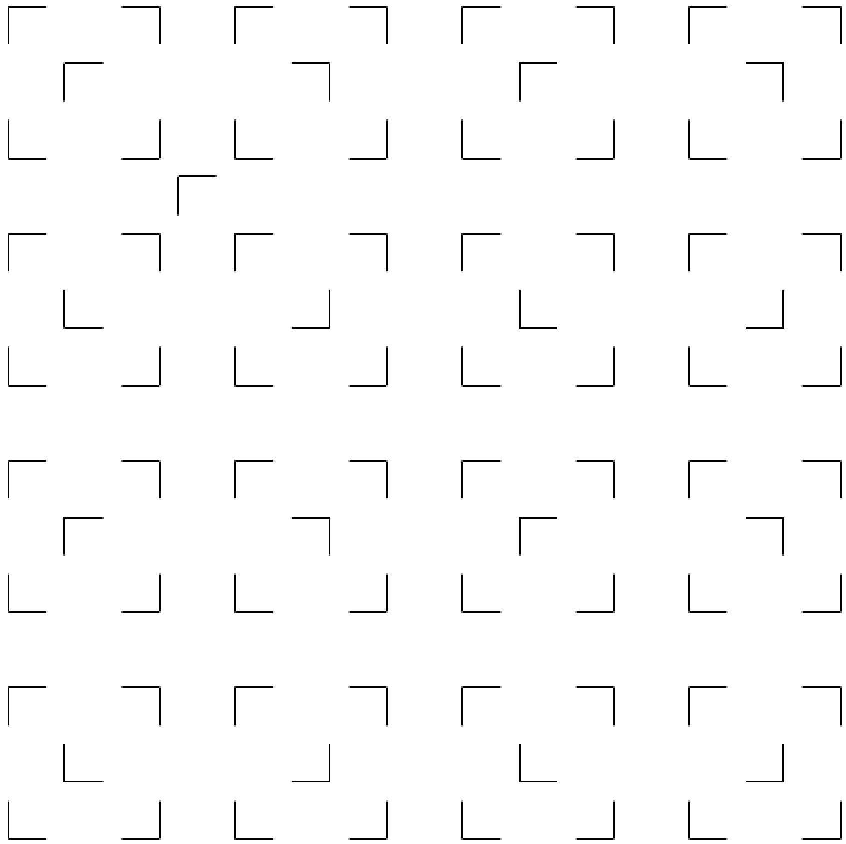
Struktura nieskończonej mozaiki



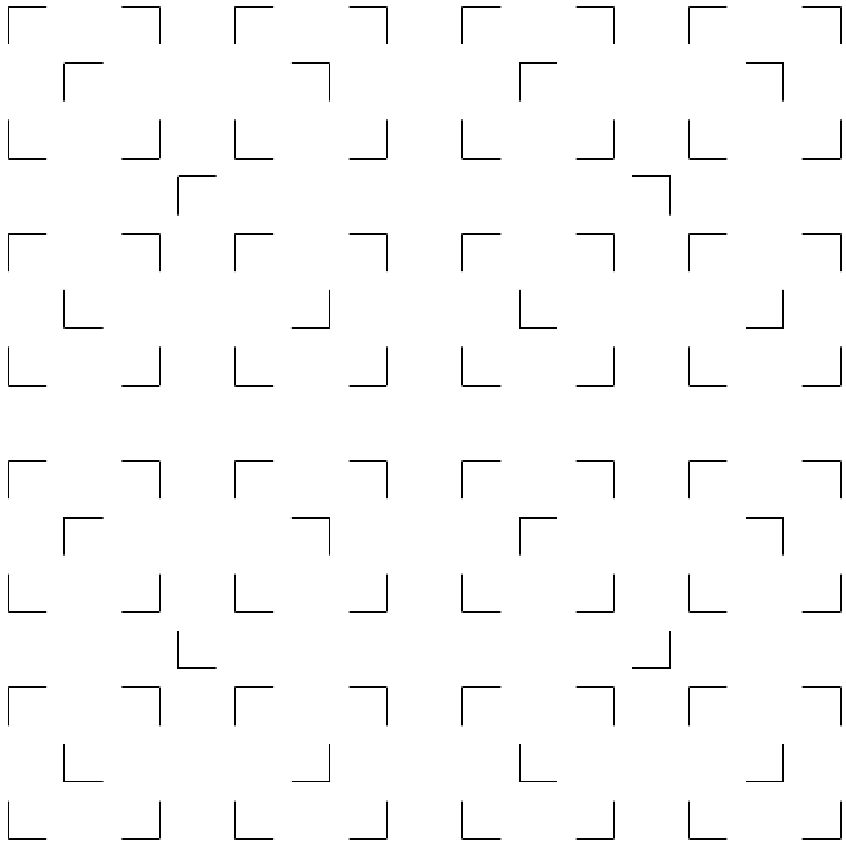
Struktura nieskończonej mozaiki



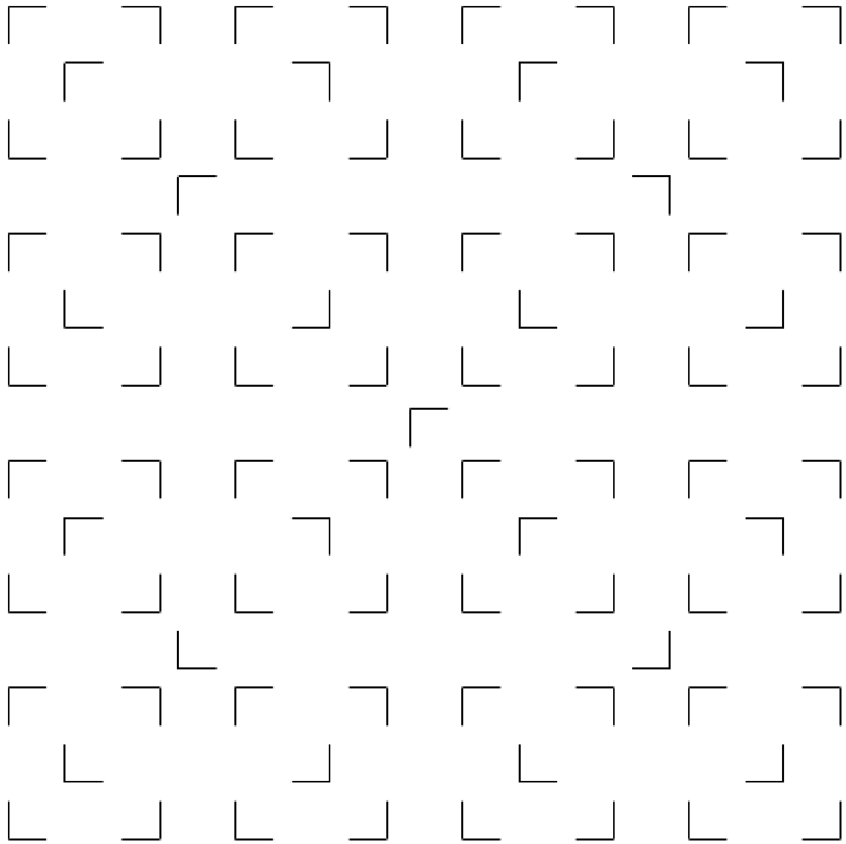
Struktura nieskończonej mozaiki



Struktura nieskończonej mozaiki



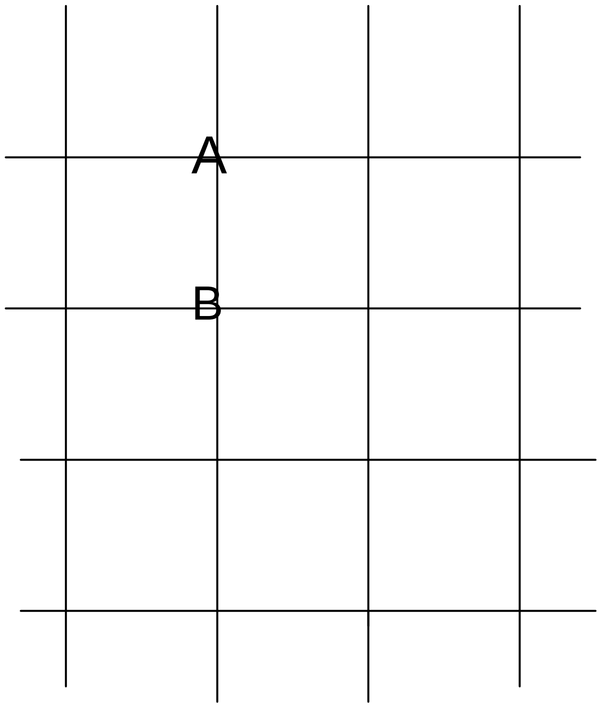
Struktura nieskończonej mozaiki



konfiguracje o okresie 2^{n+1} na podsieci 2^nZ^2 $n \geq 1$

globalny porządek z lokalnych reguł

Gaz sieciowy z 56 typami cząstek



dachówki –--- cząstki

oddziaływania:
energia A i B = 0, jeśli A i B pasują do siebie
energia A i B = 1, jeśli A i B nie pasują do siebie

stan podstawowy --- mozaika Robinsona

powyższy model oddziałujących cząstek nie posiada okresowego stanu podstawowego

$\Lambda \subset Z^d$ $\Omega_\Lambda = \{1, ..., 56\}^\Lambda$

$Hamiltonian,\ \ H : \Omega_\Lambda \to R$

$$\rho(X, T, \Lambda) = \frac{e^{-\frac{H(X)}{T}}}{Q}$$

$\rho(T, \Lambda) \to \rho(T)\ \ kiedy\ \ \Lambda \to Z^2$

$\rho(T)$ jest tak zwaną miarą Gibbsa

Problem Otwarty I

Skonstruować układ oddziałujących cząstek,
dla którego minimalizacja energii swobodnej osiągana jest
przez stany równowagowe, tak-zwane miary Gibbsa
na przestrzeni konfiguracji, które w odpowiednio niskich
temperaturach przypisują prawdopodobieństwo bliskie jedności
nieokresowym stanom podstawowym.

Wynik negatywny ale interesujący

Podwajanie okresu, JM, J. Stat. Phys. 1990

Y - mozaika Robinsona

Dla *każdego* $\epsilon > 0$ *istnieje zbiegajacy do zera ciag temperatur* T_n,
taki *że jeśli* $\mathrm{T} \leq T_n$, to $\mu_T^Y(X_i = Y_i) > 1 - \epsilon$, $i \in 2^n Z^2$

Akt 2 Dylemat Więźnia

Kooperowali: Jakub Łącki, Michał Matuszak, Bartosz Sułkowski

Gracze: dwóch podejrzanych
Strategie: Kooperacja, Zdrada
Wypłaty: obniżenie wyroku

	Kooperacja	Zdrada
Kooperacja	3	0
Zdrada	5	1

Jedyna równowaga Nasha = (Zdrada,Zdrada)

Grafy Poissona

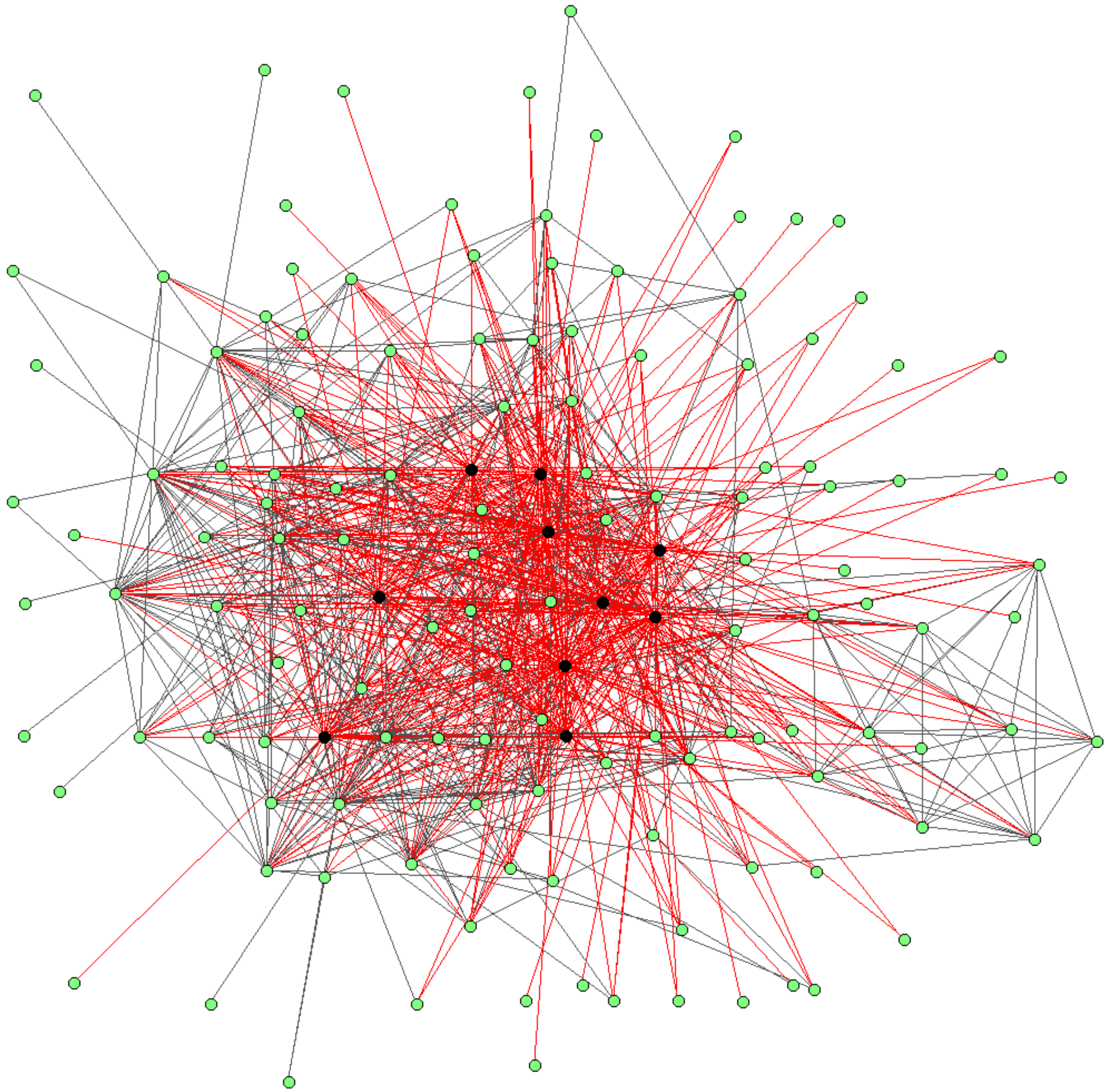
Każdą parę wierzchołków łączymy krawędzią z prawdopodobieństwem ε

Rozkład stopni wierzchołków jest rozkładem Poissona

Bezskalowe grafy typu Barabasi-Alberty

Reguła preferencyjnego linkowania

Rozkład stopni wierzchołków $\sim k^{-\lambda}$



	K	Z
K	1	0
Z	T	0

	K	Z
K	1-γ	-γ
Z	T-γ	-γ

γ - koszt połączenia

dynamika imitacji najlepszej strategii z otoczenia

średni poziom współpracy w stanie stacjonarnym

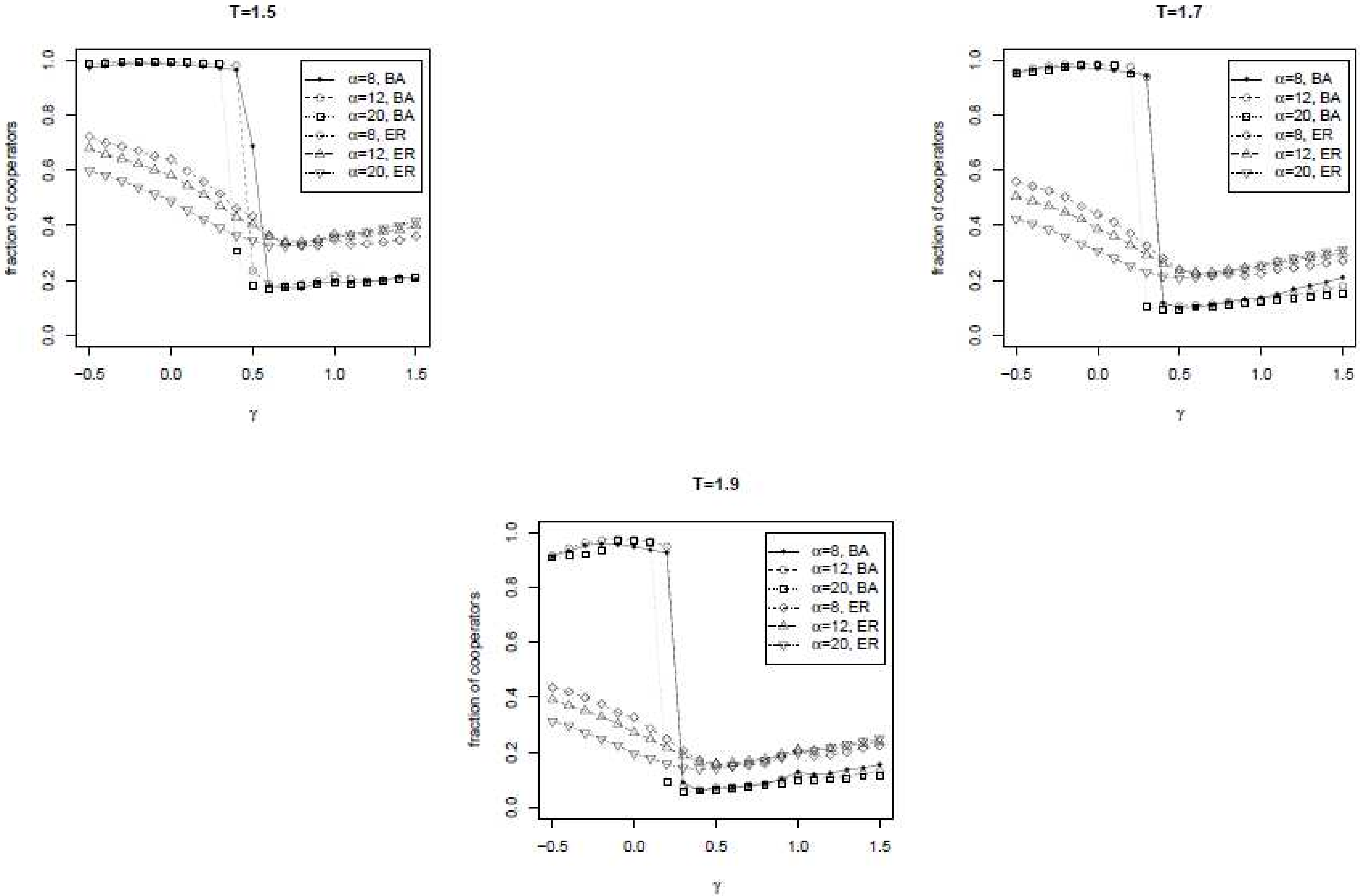


Figure 1: Fractions of cooperators depending on the cost of maintaining a link.

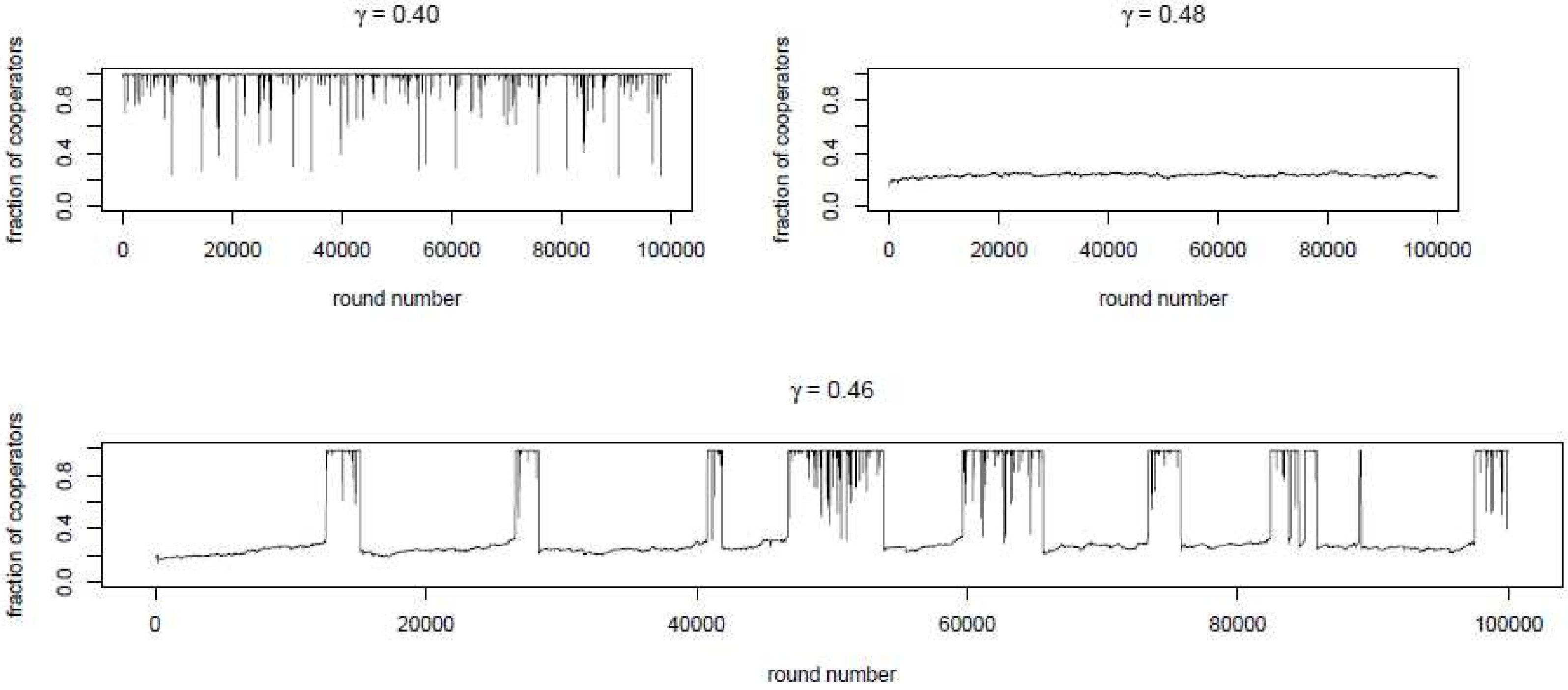


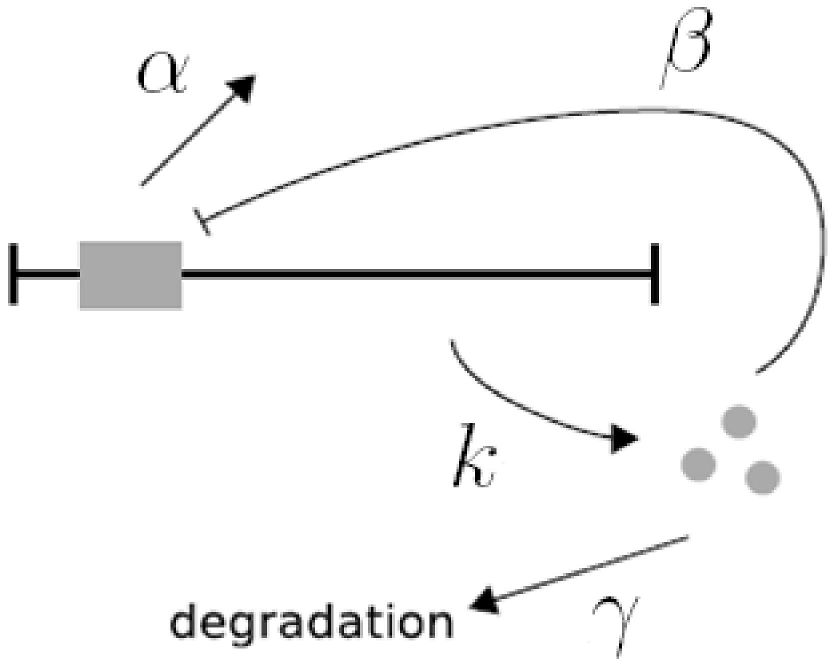
Figure 3: Fractions of cooperators after each round in sample simulations for different values of γ. Barabási-Albert network, $T = 1.5$, average connectivity equal to 12.

Problem Otwarty II

Udowodnij istnienie przejścia fazowego.
Jakiego rodzaju jest to przejście fazowe?

Akt 3 Ograniczający się gen

auto-represja genów w komórkach



Skokowe Procesy Markowa

$$0: \quad \mathrm{DNA} \xrightarrow{k_0} P \xrightarrow{\gamma} \emptyset$$

$$1: \quad \mathrm{DNA} \xrightarrow{k_1} P \xrightarrow{\gamma} \emptyset$$

Równania Mistrzów

$f_0(n,t), f_1(n,t)$ prawdopodobieństwo, że w komórce jest n cząsteczek białka i gen jest odpowiednio w stanie 0 lub 1 w czasie t

$$\frac{df_0(n,t)}{dt} = k_0[f_0(n-1) - f_0(n)] + \gamma[(n+1)f_0(n+1) - nf_0(n)] - \beta \cdot nf_0(n) + \alpha f_1(n)$$

$$\frac{df_1(n,t)}{dt} = k_1[f_1(n-1) - f_1(n)] + \gamma[nf_1(n+1) - (n-1)f_1(n)] + \beta \cdot nf_0(n) - \alpha f_1(n)$$

$$\beta$$

$$0: \quad \mathrm{DNA} \xrightarrow{k_0} P \xrightarrow{\gamma} \emptyset$$

$$\alpha$$

$$1: \quad \mathrm{DNA} \xrightarrow{k_1} P \xrightarrow{\gamma} \emptyset$$

Małe parametry

szybkie przełączanie　　　małe opóźnienie

$$\alpha = \frac{a}{\varepsilon}, \ \beta = \frac{b}{\varepsilon}$$

tau = Tε

Otwarty Problem III

Jak skonstruować rozwinięcie wokół zmiennej Poissona ?

Praca z Jankiem Wehrem wre

zapraszam do współpracy

www.mimuw.edu.pl/~miekisz