Sterowanie ze znikającą energią

J. Zabczyk

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Abstrakt i Plan prezentacji

Układy sterowalne ze znikającą energią pojawiły się w trakcie wspólnych poszukiwań z profesorem E. Priolą uogólnień klasycznego twierdzenia Liouville'a o funkcjach harmonicznych. Uzyskane twierdzenia okazały się przydatne w badaniach zespołu profesora A.Ichikawy dotyczących przejść orbitalnych pojazdów kosmicznych.

PLAN
1)Twierdzenia charakteryzacyjne, 2)Równania Hilla i zagadnienie przejść orbitalnych, 3)Konstrukcja prawie optmalnych sterowan, 4)Uogólnienia twierdzenia Liouville'a, 5)Wymiar nieskończony, 6)Literatura

Liniowe układy sterowane

Układ:

(1) $$\dot{y} = Ay + Bu, \qquad y(0) = x \in H \ (= R^n),$$

$$y^{x,u}(t) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\, ds, \qquad t \geqslant 0,$$

$$u(t) \in U \ (= R^m), \qquad E_T(u) = \int_0^T |u(s)|^2\, ds.$$

H przestrzeń stanów, U przestrzeń parametrów sterujących, *sterowania* to funkcje z $[0,+\infty)$ w U,
Sterowanie $u(\cdot)$ przeprowadza a na b, gdy $y^{a,u(\cdot)}(T) = b$

$$U_T = L^2([0,T];U)$$

Układ (1) jest sterowalny do zera, gdy dla dowolnego $a \in H$ istnieje $T > 0$ i $u(\cdot) \in U_T$, że

$$y^{a,u(\cdot)}(T) = 0$$

Układ (1) jest sterowalny, gdy dla dowolnych $a \in H$, $b \in H$ istnieje $T > 0$ i $u(\cdot) \in U_T$, że

$$y^{a,u(\cdot)}(T) = b$$

Niech $H = R^n$, $U = R^m$

Twierdzenie

Nastepujące warunki są równoważne

(i) Układ (1) jest sterowalny do zera
(ii) Układ (1) jest sterowalny
(iii) Rząd $[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$

Układ (A, B) jest sterowalny do zera ze znikającą energią (NCVE, Null Controllable with Vanishing Energy) gdy dla dowolnego $a \in H$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $T > 0$ i $u(\cdot) \in U_T$, że

$$y^{a,u(\cdot)}(T) = 0, \quad \int_0^T |u(s)|^2\, ds < \varepsilon.$$

Układ (A, B) jest sterowalny ze znikającą energią (CVE, Controllable with Vanishing Energy) gdy dla dowolnych $a, b \in H$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $T > 0$ i $u(\cdot) \in U_T$, że

$$y^{a,u(\cdot)}(T) = b, \quad \int_0^T |u(s)|^2\, ds < \varepsilon.$$

Twierdzenie 1

Układ skończenie wymiarowy (A, B) jest (NCVE) wtedy i tylko wtedy, gdy

(i) (A, B) jest sterowalny,

(ii) $P = 0$ jest jedynym nieujemnym rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego (ARE):

$$A^* P + PA - PBB^* P = 0.$$

Twierdzenie 2

Układ skończenie wymiarowy (A, B) jest (NCVE) wtedy i tylko wtedy, gdy

(i) (A, B) jest sterowalny,

(ii) $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant 0$ dla $\lambda \in \sigma(A)$.

Twierdzenie 3

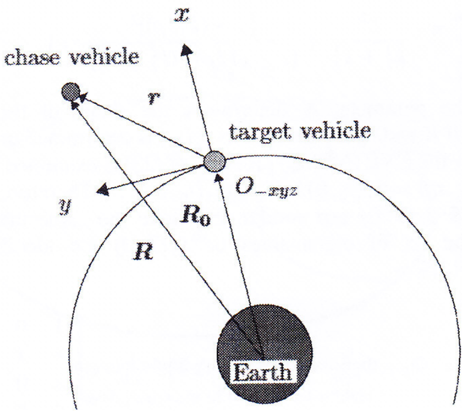
Układ skończenie wymiarowy (A, B) jest (CVE) wtedy i tylko wtedy, gdy

(i) (A, B) jest sterowalny,

(ii) $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ dla $\lambda \in \sigma(A)$.

$\sigma(A)$ to zbiór wartości własnych macierzy A.

Zagadnienie przejść orbitalnych



Rysunek 1: Stacja orbitalna i pojazd kosmiczny, Akira Ichikawa

Stacja orbitalna, pojazd kosmiczny; R_0 promień orbity stacji orbitalnej, M masa Ziemi, G stała grawitacyjna, $\mu = GM$

$$\omega = \left(\frac{\mu}{R_0^3}\right)^{1/2} = \frac{2\pi}{T} \text{ prędkość orbitalna}$$

(x, y) położenie pojazdu w układzie stacji orbitalnej

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \omega^2(R_0 + x) - \frac{\mu(R_0 + x)}{((R_0 + x)^2 + y^2)^{1/2}},$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \omega^2 y - \frac{\mu y}{((R_0 + x)^2 + y^2)^{1/2}}.$$

Linearyzacja wokół początku układu. Hill's equations:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\omega\dot{y} + 3\omega^2 x + u_1,\\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x} + u_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= (x, \dot{x}, y, \dot{y})' = (x_1, x_2, x_3, x_4)'\\ \dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= 2\omega x_4 + 3\omega^2 x_1 + u_1,\\ \dot{x}_3 &= x_4,\\ \dot{x}_4 &= -2\omega x_2 + u_2,\\ \dot{y} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2\omega & 0 & 0\end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0,0\\ 1,0\\ 0,0\\ 0,1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Rank}\left[B, AB, A^2B, A^3B\right] = 4,$$

$$[B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2\omega & 0 \end{pmatrix} \text{ nieosobliwa}$$

$$\sigma(A) = [0, 0, i\omega, -i\omega].$$

Ruch swobodny

$$x(t) = 4x_0 + \left(\frac{2}{\omega}\right)\dot{x}_0 - \left(3x_0 + \left(\frac{2}{\omega}\right)\dot{y}_0\right)\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\dot{x}_0 \sin\omega t,$$

$$y(t) = x_0 - \left(\frac{2}{\omega}\right)\dot{x}_0 + \left(\frac{2}{\omega}\right)\dot{x}_0 \cos\omega t + \left(6x_0 + \left(\frac{4}{\omega}\right)\dot{y}_0\right)\sin\omega t$$
$$- (6\omega z_0 + 3\dot{y}_0)t.$$

Rozwiązanie okresowe $\dot{y}_0 = -2\omega x_0$

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \left(\frac{1}{\omega}\right)\dot{x}_0 \sin\omega t,$$

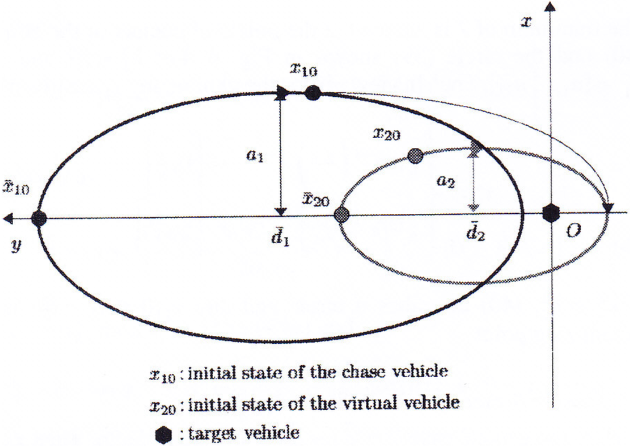
$$y(t) = y_0 - \left(\frac{2}{\omega}\right)\dot{x}_0 + \left(\frac{2}{\omega}\right)\dot{x}_0 \cos\omega t - 2x_0 \sin\omega t.$$

Trajektorie okresowe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{(2a)^2} = 1,$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}, \qquad d = y_0 - \frac{2}{\omega}\dot{x}_0,$$

Problem zmiany orbity



Rysunek 2: Orbita początkowa i orbita docelowa, Akira Ichikawa

Problem zmiany orbity

$$x_{10} = (x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0) \quad \text{punkt startu pojazdu}$$

wyjściowe parametry a_1, d_1

$$\dot{y}_1 = Ay_1 + Bu, \qquad y_1(0) = x_{10},$$

a_2, d_2 parametry docelowej orbity

$$\dot{y}_2 = Ay_2, \qquad y_2(0) = x_{20},$$

x_{20} punkt pozorny na docelowej orbicie.

Prawie optymalne sprzężenia zwrotne

Twierdzenie 4

1) Jeżeli para (A, B) jest (NCVE) to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $P_\varepsilon \geqslant 0$ równania

$$PA + A^* P - PBB^* P + \varepsilon I = 0,$$

malejące do 0 gdy $\varepsilon \downarrow 0$.
2) Jeżeli

$$u_\varepsilon(t) = -B^* P_\varepsilon y_\varepsilon(t), \qquad t \geqslant 0$$

gdzie

$$\dot{y}_\varepsilon = Ay_\varepsilon + Bu_\varepsilon(t), \qquad y_\varepsilon(0) = \bar{x}$$

to

$$\lim_{t\to\infty} y_\varepsilon(t) = 0 \quad \text{i} \quad \int_0^{+\infty} |u_\varepsilon(t)|^2 \, dt \leqslant \langle P_\varepsilon \bar{x}, \bar{x} \rangle$$

Jeżeli $y(t) = y_1(t) - y_2(t)$, $t \geqslant 0$, to

$$\dot{y} = Ay + Bu, \qquad y(0) = x_{10} - x_{20}.$$

Jeżeli

$$u(t) = -B^* P_\varepsilon y(t), \qquad t \geqslant 0,$$
$$P_\varepsilon A + A^* P_\varepsilon - P_\varepsilon BB^* P_\varepsilon + \varepsilon I = 0, \qquad P_\varepsilon \geqslant 0,$$
$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0, \qquad \int_0^{+\infty} |y(t)|^2 \, dt \leqslant \langle P_\varepsilon y(0), y(0) \rangle.$$

Nowy proces optymalizacyjny:

$$\min_{x_{10}, x_{20}} \langle P_\varepsilon (x_{10} - x_{20}), x_{10} - x_{20} \rangle.$$

Operator Ornsteina–Uhlenbecka na R^n:

$$\mathcal{L}f(x) = \langle Ax, Df(x)\rangle + \operatorname{Tr} B^* D^2 f(x) B, \qquad x \in R^n$$

- $\mathcal{L} = \Delta \qquad$ gdy $\qquad A = 0,\ B = I$
- Gdy $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, to

$$\mathcal{L}f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

Twierdzenie 5

Ograniczone rozwiązania f równania

$$\mathcal{L}f(x) = 0, \qquad x \in R^n$$

są stałe, wtedy i tylko wtedy, gdy (A, B) jest (NCVE).

Literatura

- **E. Priola and J. Zabczyk**, *Null controllability with vanishing energy*, SIAM J. Control Optim., 42 (2003), 1013–1032.
- **L. Pandolfi, E. Priola and J. Zabczyk**, *Linear operator inequality and null controllability with vanishing energy for unbounded control systems*, SIAM J. Control Optim., 51 (2013), 629–659.
- **M. Shibata and A. Ichikawa**, *Orbital rendevous and flyaround based on null controllability with vanishing energy*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, 30 (2007), 934–945.
- **E. Priola and J. Zabczyk**, *Liouville theorems for non-local operators*, Journal of Funct. Analysis, 216 (2004), 455–490.

- **A. Ichikawa**, *Null controllability with vanishing energy for discrete-time systems*, Control Lett., 57 (2008), 34–38.
- **A. Ichikawa**, *Minimum energy control and its applications*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 42 (2008), 475–480.
- **J. van Neerven**, *Null controllability and the algebraic Riccati equation in Banach spaces*, SIAM J. Control Optim., 43 (2005), 1313–1327.