Co to jest IBC?

Leszek Plaskota

Uniwersytet Warszawski
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki

XXX-lecie IMSM
Warszawa, 20-22 kwietnia 2017

IBC = **I**nformation-**B**ased **C**omplexity

IBC zajmuje się badaniem trudności zadań obliczeniowych matematyki ciągłej.

Takie zadania *nie* mogą być rozwiązane dokładnie.

ε-złożoność zadania to minimalny koszt algorytmu rozwiązującego zadanie z dokładnością ε.

ε-złożoność zależy od:

- modelu obliczeniowego
- sposobu mierzenia błędu i kosztu algorytmu

(Pierwsza monografia Traub & Woźniakowski, 1980)

Model obliczeniowy

Operator rozwiązania: F - liniowa, G - unormowana

$$S : F \longrightarrow G$$

Operator informacji (zaburzonej):

$$N : F \longrightarrow 2^Y, \qquad Y \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}^n$$

$$y \in Y \text{ jest informacją o } f \text{ jeśli } y \in N(f)$$

Algorytm:

$$\Phi : Y \longrightarrow G$$

Aproksymacja:

$$S(f) \sim \Phi(y), \qquad y \in N(f),\ f \in F$$

Błąd i koszt algorytmu (przypadek najgorszy)

Założenie: $f \in \mathcal{F} \subseteq F$

Błąd

$$\mathrm{err}^{\mathrm{wor}}(\Phi, N) := \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{y \in N(f)} \|S(f) - \Phi(y)\|$$

Koszt (informacyjny)

$$\mathrm{cost}^{\mathrm{wor}}(N) := \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{y \in N(f)} \mathrm{cost}(y)$$

ε-złożoność

$$\mathrm{comp}^{\mathrm{wor}}(\varepsilon) := \inf \left\{ \mathrm{cost}^{\mathrm{wor}}(N) : \exists \Phi \ \mathrm{err}^{\mathrm{wor}}(\Phi, N) \leqslant \varepsilon \right\}$$

(przypadek średni, randomizacyjny, asymptotyczny, ...)

Aproksymacja funkcji gładkich

Przestrzeń:

$$F = H_{r,\varrho}, \qquad r \geqslant 0,\ 0 < \varrho \leqslant 1$$

$f \in H_{r,\varrho}$ w.t.w. $f \in C^r([0,1])$ i $f^{(r)}$ hölderowsko ciągła z wykładnikiem ϱ. To jest przestrzeń Banacha jeśli

$$\|f\|_{H_{r,\varrho}} = \sum_{k=0}^{r} \|f^{(k)}\|_C + [f]_{H_{r,\varrho}}$$

$$[f]_{H_{r,\varrho}} = \sup_{a \leqslant x < y \leqslant b} \frac{|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)|}{|x-y|^{\varrho}} < +\infty$$

Zadanie:

$$\mathrm{App} : H_{r,\varrho} \hookrightarrow L^p(0,1), \qquad 1 \leqslant p \leqslant +\infty$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{H}_{r,\varrho} = \{\, f \in H_{r,\varrho} :\ \|f\|_{H_{r,\varrho}} \leqslant 1 \,\}$$

Aproksymacja funkcji gładkich

Informacja (adaptacyjna): $N : H_{r,\varrho} \to 2^Y$

$$
\begin{array}{ll}
y_1 = f(x_1) + e_1, & |e_1| \leqslant \delta_1 \\
y_2 = f(x_2(y_1)) + e_2, & |e_2| \leqslant \delta_2(y_1) \\
\ldots & \ldots \\
y_i = f(x_i(y_1, y_2, \ldots, y_{i-1})) + e_i, & |e_i| \leqslant \delta_i(y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}) \\
\ldots & \ldots
\end{array}
$$

Kryterium kończenia: $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in Y$

$$
\mathrm{cost}(y) = \sum_{i=1}^{n(y)} c(\delta_i(y_1, \ldots, y_{i-1}))
$$

gdzie $c(\delta)$ to koszt uzyskania $f(x)$ z błędem δ

Aproksymacja funkcji gładkich

Aproksymacja:

$$f \sim \Phi(y) = \sum_{i=1}^{n(y)} a_i(y)\phi_i, \qquad \phi_i \in L^p(0,1)$$

Twierdzenie 1

$$\mathrm{comp}^{\mathrm{wor}}(\varepsilon; \mathcal{H}_{r,\varrho}) \asymp c(\varepsilon) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/(r+\varrho)}$$

Optymalna aproksymacja Φ^* to interpolacja kawałkami wielomianowa stopnia r oparta na siatce równomiernej i informacji z błędem ε.

- adaptacja nie pomaga
- Φ^* zależy liniowo of y

Aproksymacja funkcji kawałkami gładkich

Przestrzeń $F_{r,\varrho}$:

$f \in F_{r,\varrho}$ jeśli istnieją $s_f \in [0,1)$ i $g_f \in H_{r,\varrho}$ takie, że

$$f(\ell + s_f + x) = g_f(x) \quad \text{dla} \quad \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad x \in [0,1)$$

Skoki nieciągłości:

$$\Delta_f^{(j)} \;=\; f^{(j)}(s_f^{+}) - f^{(j)}(s_f^{-}) \;=\; g_f^{(j)}(0) - g_f^{(j)}(1), \qquad 0 \leqslant j \leqslant r$$

Zakładamy, że s_f i $\Delta_f^{(j)}$ są nieznane

Aproksymacja funkcji kawałkami gładkich

Niech

$$\mathcal{F}_{r,\varrho} = \{ f \in F_{r,\varrho} : \; [g_f]_{H_{r,\varrho}} \leqslant 1 \}$$

Jeśli $r \geqslant 1$ to

$$\mathrm{comp}^{\mathrm{wor}}(\varepsilon, \mathcal{F}_{r,\varrho}) = +\infty$$

"Ciekawe" klasy:

$$\mathcal{F}^{D}_{r,\varrho} = \{ f \in F_{r,\varrho} : \; [g_f]_{H_{r,\varrho}} \leqslant 1, \; |\Delta_f^{(0)}| \leqslant 1 \}$$
$$\mathcal{F}^{C}_{r,\varrho} = \{ f \in F_{r,\varrho} : \; [g_f]_{H_{r,\varrho}} \leqslant 1, \; \Delta_f^{(0)} = 0 \} = \mathcal{F}^{D}_{r,\varrho} \cap C$$

Theorem 2

$$
\begin{aligned}
\mathrm{comp}^{\mathrm{wor}}(\varepsilon; \mathcal{F}^D_{r,\varrho}) &= +\infty && p = +\infty \\
\mathrm{comp}^{\mathrm{wor}}(\varepsilon; \mathcal{F}^D_{r,\varrho}) &\asymp c(\varepsilon)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/(r+\varrho)} && 1 \leqslant p < \infty, \\
\mathrm{comp}^{\mathrm{wor}}(\varepsilon; \mathcal{F}^C_{r,\varrho}) &\asymp c(\varepsilon)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/(r+\varrho)} && 1 \leqslant p \leqslant +\infty
\end{aligned}
$$

Uwaga. Optymalna aproksymacja używa około $\log(1/\varepsilon)$ punktów adaptacyjnych w klasie $\mathcal{F}^D_{r,\varrho}$, oraz $\max(0, r-1)$ punktów adaptacyjnych w klasie $\mathcal{F}^C_{r,\varrho}$

Informacja z szumem gaussowskim

Informacja:

$$
\begin{array}{ll}
y_1 = f(x_1) + e_1, & e_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2) \\
y_2 = f(x_2(y_1)) + e_2, & e_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2(y_1)) \\
\dots & \dots \\
y_i = f(x_i(y_1, y_2, \dots, y_{i-1})) + e_i, & e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}))
\end{array}
$$

$\Pi = \{\pi_f\}_{f \in F}$, gdzie π_f to rozkład informacji y dla f

Koszt:

$$
\mathrm{cost}^{\mathrm{stat}}(\Pi) := \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_Y \mathrm{cost}(y)\, \pi_f(\mathrm{d}y)
$$

Błąd:

$$
\mathrm{err}^{\mathrm{stat}}(\Phi, \Pi) := \left(\sup_{f \in F} \int_Y \|f - \Phi(y)\|_{L^p}^p \pi_f(\mathrm{d}y) \right)^{1/p}
$$

$(1 \leqslant p < +\infty)$

Informacja z szumem gaussowskim

Dla funkcji gładkich:

Twierdzenie 3

$$\mathrm{comp}^{\mathrm{stat}}(\varepsilon; \mathcal{H}_{r,\varrho}) \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2+1/(r+\varrho)}$$

- adaptacja nie pomaga
- informacja musi być odpowiednio "wygładzona"

Dla funkcji kawałkami gładkich:

Hipoteza

$$\mathrm{comp}^{\mathrm{stat}}(\varepsilon; \mathcal{F}^{D}_{r,\varrho}) \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2+1/(r+\varrho)}$$

Dziękuję za uwagę