WYBUCHY ROZWIĄZAŃ NIELINIOWYCH RÓWNAŃ PARABOLICZNYCH:
nieliniowe równanie ciepła, model Keller–Segela chemotaksji

Piotr BILER
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski,
pl. Grunwaldzki 2/4, 50–384 Wrocław, Poland
Piotr.Biler@math.uni.wroc.pl

Warszawa, 22.04.2017.

Nieliniowe równanie ciepła

NLH

$$u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty), \qquad p > 1$$

osobliwe rozwiązanie stacjonarne: $u_C(x) = \frac{c}{|x|^{d(p-1)/2}}$,

$$c = \left(\frac{2}{p-1}\left(d - \frac{2p}{p-1}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Nieliniowe równanie ciepła

NLH

$$u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, \;\; (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty), \quad p > 1$$

osobliwe rozwiązanie stacjonarne: $u_C(x) = \frac{c}{|x|^{d(p-1)/2}}$,

$$c = \left(\frac{2}{p-1}\left(d - \frac{2p}{p-1}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

interpretacje

Równania chemotaksji — model Keller–Segela

KS

$$u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla \varphi),$$
$$\varepsilon \varphi_t = \Delta \varphi + u$$

$u = u(x,t) \geq 0$ oznacza gęstość mikroorganizmów (np. ameb)
$\varphi = \varphi(x,t)$ — koncentrację chemoatraktanta
$\varepsilon = 0$: cząstki grawitujące

$\varepsilon > 0$: dyfuzja chemoatraktanta

$d = 2$:
$E_2(z) = \frac{1}{2\pi} \log |z|$ — rozwiązanie fundamentalne Laplasjanu na $\mathbb{R}^2$.

$$\varphi = -E_2 * u, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty).$$

podobnie $d \geq 3$: $E_d(z) = -c_d |z|^{2-d}$ (nielokalny charakter)

Model z nielokalną dyfuzją

$$u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u + \nabla \cdot (u \nabla v) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0,$$

$$\Delta v + u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0.$$

$\alpha \in (0, 2]$ — interpretacje

osobliwe rozwiązanie stacjonarne
$u_C(x) = \frac{c}{|x|^\alpha}$,
$c = c(d, \alpha)$, $c(d, 2) = 2(d-2)$,

Model z nielokalną dyfuzją

$$u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u + \nabla \cdot (u \nabla v) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \ t > 0,$$

$$\Delta v + u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \ t > 0.$$

$\alpha \in (0, 2]$ — interpretacje

osobliwe rozwiązanie stacjonarne
$u_C(x) = \frac{c}{|x|^\alpha}$,
$c = c(d, \alpha)$, $c(d, 2) = 2(d-2)$,

$$c(\alpha, d) = 2^\alpha \frac{\Gamma\left(\frac{d-\alpha}{2} + 1\right)\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{d}{2} - \alpha + 1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Rozwiązania globalne w czasie

NLH:
małe dane, $p > \frac{d+2}{d}$

Rozwiązania globalne w czasie

NLH:
małe dane, $p > \frac{d+2}{d}$

KS
dla $d = 1$

Rozwiązania globalne w czasie

NLH:
małe dane, $p > \frac{d+2}{d}$

KS
dla $d = 1$

dla $d = 2$ jeśli $M < 8\pi$ $(M < M(\Omega))$

Rozwiązania globalne w czasie

NLH:
małe dane, $p > \frac{d+2}{d}$

KS
dla $d = 1$

dla $d = 2$ jeśli $M < 8\pi$ $(M < M(\Omega))$

dla $d \geq 3$ jeśli dane początkowe są dostatecznie małe

Rola **warunków brzegowych** w zagadnieniu na obszarze ograniczonym

Rozwiązanie eksplodujące w skończonym czasie

Rozwiązanie eksplodujące w skończonym czasie

$d = 2$: M dostatecznie duże

wybuch wewnątrz obszaru (lub na brzegu)

Rozwiązanie eksplodujące w skończonym czasie

$d = 2$: M dostatecznie duże

wybuch wewnątrz obszaru (lub na brzegu)

$d \geq 3$: u_0 dostatecznie skoncentrowane

$$\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^d} |x|^\gamma u_0(x) \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \mathrm{d}x} \right)^{\frac{d-2}{\gamma}} \leq cM,$$

dla pewnego $0 < \gamma \leq 2$ i (małego) $c = c(d) > 0$

Rozwiązanie eksplodujące w skończonym czasie

$d = 2$: M dostatecznie duże

wybuch wewnątrz obszaru (lub na brzegu)

$d \geq 3$: u_0 dostatecznie skoncentrowane

$$\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^d} |x|^\gamma u_0(x) \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \mathrm{d}x} \right)^{\frac{d-2}{\gamma}} \leq cM,$$

dla pewnego $0 < \gamma \leq 2$ i (małego) $c = c(d) > 0$

w momencie wybuchu $0 < T < \infty$

$$\lim_{t \nearrow T} \sup u(x,t) = \infty$$

co się dzieje z innymi normami $u(t)$ gdy $t \nearrow T$?

H. Fujita — klasyka, F.B. Weissler, Y. Giga–R.V.Kohn, ... , Ph. Souplet; W. Jäger, S. Luckhaus, T. Nagai, T. Senba, T. Suzuki

wybuch rozwiązania: $\lim_{t \nearrow T} u(x,t) = \infty$

H. Fujita — klasyka,
F.B. Weissler, Y. Giga–R.V.Kohn, ... , Ph. Souplet; W. Jäger, S. Luckhaus, T. Nagai, T. Senba, T. Suzuki

wybuch rozwiązania: $\lim_{t \nearrow T} u(x,t) = \infty$

co to znaczy?

H. Fujita — klasyka, F.B. Weissler, Y. Giga–R.V.Kohn, ... , Ph. Souplet; W. Jäger, S. Luckhaus, T. Nagai, T. Senba, T. Suzuki

wybuch rozwiązania: $\lim_{t \nearrow T} u(x,t) = \infty$

co to znaczy?

jak to rozpoznać?

H. Fujita — klasyka, F.B. Weissler, Y. Giga–R.V.Kohn, ... , Ph. Souplet; W. Jäger, S. Luckhaus, T. Nagai, T. Senba, T. Suzuki

wybuch rozwiązania: $\lim_{t \nearrow T} u(x,t) = \infty$

co to znaczy?

jak to rozpoznać?

kiedy to następuje?

H. Fujita — klasyka, F.B. Weissler, Y. Giga–R.V.Kohn, ... , Ph. Souplet; W. Jäger, S. Luckhaus, T. Nagai, T. Senba, T. Suzuki

wybuch rozwiązania: $\lim_{t \nearrow T} u(x,t) = \infty$

co to znaczy?

jak to rozpoznać?

kiedy to następuje?

co naprawdę dzieje się?

$$G_t + \Delta G = 0, \quad G(.,T) = \delta_0$$

$$G(x,t) = (4\pi(T-t))^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(T-t)}\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\mathrm{d}x = 1 \ \text{ dla kazdego } \ t \in [0,T)$$

$$W(t) = \int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{(T-t)\Delta}u(t)(0)$$

inne momenty

$$W(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)u(x,t)\mathrm{d}x$$

$$G_t + \Delta G = 0, \quad G(., T) = \delta_0$$

$$G(x,t) = (4\pi(T-t))^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(T-t)}\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\mathrm{d}x = 1 \ \text{ dla kazdego } \ t \in [0, T)$$

$$W(t) = \int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{(T-t)\Delta}u(t)(0)$$

inne momenty

$$W(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)u(x,t)\mathrm{d}x$$

$\Delta\psi + \lambda\psi = 0$ na kuli $|x| < R$,

$$G_t + \Delta G = 0, \quad G(., T) = \delta_0$$

$$G(x,t) = (4\pi(T-t))^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(T-t)}\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\mathrm{d}x = 1 \;\; \text{dla kazdego} \;\; t \in [0,T)$$

$$W(t) = \int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{(T-t)\Delta}u(t)(0)$$

inne momenty

$$W(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)u(x,t)\mathrm{d}x$$

$\Delta\psi + \lambda\psi = 0$ na kuli $|x| < R$,

$\psi(x) = |x|^2$, $\psi(x) = |x|^\gamma$, $0 < \gamma < \alpha$,

$$G_t + \Delta G = 0, \quad G(., T) = \delta_0$$

$$G(x,t) = (4\pi(T-t))^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(T-t)}\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\mathrm{d}x = 1 \ \text{ dla kazdego } \ t \in [0,T)$$

$$W(t) = \int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{(T-t)\Delta}u(t)(0)$$

inne momenty

$$W(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)u(x,t)\mathrm{d}x$$

$\Delta\psi + \lambda\psi = 0$ na kuli $|x| < R$,

$\psi(x) = |x|^2$, $\psi(x) = |x|^\gamma$, $0 < \gamma < \alpha$,

$\psi(x) = (1 - |x|^2)_+^{1+\alpha/2}$

$$G_t + \Delta G = 0, \quad G(., T) = \delta_0$$

$$G(x,t) = (4\pi(T-t))^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(T-t)}\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)\mathrm{d}x = 1 \ \text{ dla kazdego } \ t \in [0,T)$$

$$W(t) = \int_{\mathbb{R}^d} G(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{(T-t)\Delta}u(t)(0)$$

inne momenty

$$W(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)u(x,t)\mathrm{d}x$$

$\Delta\psi + \lambda\psi = 0$ na kuli $|x| < R$,

$\psi(x) = |x|^2$, $\psi(x) = |x|^\gamma$, $0 < \gamma < \alpha$,

$\psi(x) = (1-|x|^2)_+^{1+\alpha/2}$
$(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x) = m_\alpha\left(1 - \frac{d+\alpha}{d}|x|^2\right)$ na $\{|x| \le 1\}$,
$(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x) \le 0, \quad |x| \ge 1$, a więc: $(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x) \le \ell_\alpha\psi(x)$

Dowód wybuchu metodą Fujity

$$W(0) \in [0,\infty) \ \ \mathrm{dla} \ \ u_0 \geq 0, \quad \mathrm{i} \ \ W(0) \in (0,\infty) \ \ \mathrm{gdy} \ \ 0 \leq u_0 \not\equiv 0$$

$W(0) = \mathrm{e}^{T\Delta} u_0(0)$

Dowód wybuchu metodą Fujity

$$W(0) \in [0,\infty) \ \text{ dla } \ u_0 \geq 0, \ \text{ i } \ W(0) \in (0,\infty) \ \text{ gdy } \ 0 \leq u_0 \not\equiv 0$$

$W(0) = \mathrm{e}^{T\Delta} u_0(0)$

cel: $\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t} \geq (W(t))^p$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t} &= \int_{\mathbb{R}^d} (Gu_t + G_t u)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} G(\Delta u + u^p)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^d} \Delta G\, u\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \Delta G\, u\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} Gu^p\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^d} \Delta G\, u\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} Gu^p\mathrm{d}x \\
&\geq \left(\int_{\mathbb{R}^d} Gu\mathrm{d}x\right)^p,
\end{aligned}$$

$$W(0)^{1-p} - W(t)^{1-p} \geq (p-1)t$$

dla wszystkich $t \in [0, T)$, tzn.

$$W(t) \geq \left(W(0)^{1-p} - (p-1)t\right)^{-\frac{1}{p-1}}$$

$$W(0)^{1-p} - W(t)^{1-p} \geq (p-1)t$$

dla wszystkich $t \in [0, T)$, tzn.

$$W(t) \geq \left(W(0)^{1-p} - (p-1)t\right)^{-\frac{1}{p-1}}$$

jeśli

$$W(0) = \mathrm{e}^{T\Delta} u_0(0) > ((p-1)T)^{-\frac{1}{p-1}},$$

to dla $t \nearrow T$ — sprzeczność

$$W(0)^{1-p} - W(t)^{1-p} \geq (p-1)t$$

dla wszystkich $t \in [0, T)$, tzn.

$$W(t) \geq \left(W(0)^{1-p} - (p-1)t\right)^{-\frac{1}{p-1}}$$

jeśli

$$W(0) = \mathrm{e}^{T\Delta} u_0(0) > ((p-1)T)^{-\frac{1}{p-1}},$$

to dla $t \nearrow T$ — sprzeczność

tzn. gdy $T^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{e}^{T\Delta} u_0(0) > \left(\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$;

$$W(0)^{1-p} - W(t)^{1-p} \geq (p-1)t$$

dla wszystkich $t \in [0, T)$, tzn.

$$W(t) \geq \left(W(0)^{1-p} - (p-1)t\right)^{-\frac{1}{p-1}}$$

jeśli

$$W(0) = \mathrm{e}^{T\Delta} u_0(0) > ((p-1)T)^{-\frac{1}{p-1}},$$

to dla $t \nearrow T$ — sprzeczność

tzn. gdy $T^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{e}^{T\Delta} u_0(0) > \left(\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$;

w szczególności gdy $d \leq \frac{2}{p-1}$.

wielkość $\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p-1}} \left\| \mathrm{e}^{t\Delta} u_0 \right\|_\infty$
jest równoważna normie w przestrzeni Morreya $M^s(\mathbb{R}^d)$, $s = d(p-1)/2$:

$$\|u\|_{M^s} \equiv \sup_{R>0,\, x\in\mathbb{R}^d} R^{d(1/s-1)} \int_{\{|y-x|<R\}} |u(y)| \mathrm{d}y$$

wielkość $\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p-1}} \left\|\mathrm{e}^{t\Delta} u_0\right\|_\infty$
jest równowazna normie w przestrzeni Morreya $M^s(\mathbb{R}^d)$, $s = d(p-1)/2$:

$$\|u\|_{M^s} \equiv \sup_{R>0,\, x\in\mathbb{R}^d} R^{d(1/s-1)} \int_{\{|y-x|<R\}} |u(y)|\mathrm{d}y$$

czyli zachodzi dychotomia: dla $p > 1 + \frac{2}{d}$ istnieją stałe $0 < c_d < C_d < \infty$

wielkość $\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p-1}} \left\|\mathrm{e}^{t\Delta} u_0\right\|_\infty$
jest równowazna normie w przestrzeni Morreya $M^s(\mathbb{R}^d)$, $s = d(p-1)/2$:

$$\|u\|_{M^s} \equiv \sup_{R>0,\, x\in\mathbb{R}^d} R^{d(1/s-1)} \int_{\{|y-x|<R\}} |u(y)|\mathrm{d}y$$

czyli zachodzi dychotomia: dla $p > 1 + \frac{2}{d}$ istnieją stałe $0 < c_d < C_d < \infty$

dla $\|u_0\|_{M^{d(p-1)/2}} < c_d$ rozwiązanie jest globalne w czasie;

wielkość $\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p-1}} \left\|\mathrm{e}^{t\Delta} u_0\right\|_\infty$
jest równowazna normie w przestrzeni Morreya $M^s(\mathbb{R}^d)$, $s = d(p-1)/2$:

$$\|u\|_{M^s} \equiv \sup_{R>0,\, x\in\mathbb{R}^d} R^{d(1/s-1)} \int_{\{|y-x|<R\}} |u(y)| \mathrm{d}y$$

czyli zachodzi dychotomia: dla $p > 1 + \frac{2}{d}$ istnieją stałe $0 < c_d < C_d < \infty$

dla $\|u_0\|_{M^{d(p-1)/2}} < c_d$ rozwiązanie jest globalne w czasie;

dla $\|u_0\|_{M^{d(p-1)/2}} > C_d$ rozwiązanie wybucha w skończonym czasie.

Wybuchy dla radialnych rozwiązań KS

$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ funkcja radialna,
$v = E_d * u$, $\quad E_2(x) = -\frac{1}{2\pi}\log|x|$, $E_d(x) = \frac{1}{(d-2)\sigma_d}|x|^{2-d}$, $d \geq 3$,
rozwiązanie równania Poissona $\Delta v + u = 0$.
Wówczas

$$\nabla v(x) \cdot x = -\frac{1}{\sigma_d}|x|^{2-d} \int_{\{|y| \leq |x|\}} u(y)\mathrm{d}y.$$

Wybuchy dla radialnych rozwiązań KS

$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ funkcja radialna,
$v = E_d * u$, $\quad E_2(x) = -\frac{1}{2\pi}\log|x|$, $E_d(x) = \frac{1}{(d-2)\sigma_d}|x|^{2-d}$, $d \geq 3$,
rozwiązanie równania Poissona $\Delta v + u = 0$.
Wówczas

$$\nabla v(x) \cdot x = -\frac{1}{\sigma_d}|x|^{2-d} \int_{\{|y| \leq |x|\}} u(y)\mathrm{d}y.$$

Dowód: z twierdzenia Gaussa:

$$M(R) \equiv \int_{\{|x| \leq R\}} u(y)\mathrm{d}y = -\int_{\{|x|=R\}} \nabla v(x) \cdot \frac{x}{|x|}\mathrm{d}S.$$

Wybuchy dla radialnych rozwiązań KS

$u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ funkcja radialna,
$v = E_d * u$, $\quad E_2(x) = -\frac{1}{2\pi}\log|x|$, $E_d(x) = \frac{1}{(d-2)\sigma_d}|x|^{2-d}$, $d \geq 3$,
rozwiązanie równania Poissona $\Delta v + u = 0$.
Wówczas

$$\nabla v(x) \cdot x = -\frac{1}{\sigma_d}|x|^{2-d}\int_{\{|y|\leq|x|\}} u(y)\mathrm{d}y.$$

Dowód: z twierdzenia Gaussa:

$$M(R) \equiv \int_{\{|x|\leq R\}} u(y)\mathrm{d}y = -\int_{\{|x|=R\}} \nabla v(x) \cdot \frac{x}{|x|}\mathrm{d}S.$$

$$\nabla v(x) \cdot x = -\frac{1}{\sigma_d}R^{1-d}(RM(R)) = -\frac{1}{\sigma_d}R^{2-d}M(R)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= \int (Gu_t + G_t u)\mathrm{d}x \\
&= \int (\Delta u - \nabla\cdot(u\nabla v))G\mathrm{d}x - \int \Delta G\, u\mathrm{d}x \\
&= \int \Delta G\, u\mathrm{d}x + \int u\nabla v\cdot\nabla G\mathrm{d}x - \int \Delta G\, u\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2(T-t)}\int u\nabla v\cdot xG\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\sigma_d(T-t)}\int u(x,t)M(|x|,t)|x|^{2-d}G(x,t)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sigma_d}{2\sigma_d(T-t)}\int_0^\infty \frac{1}{\sigma_d}M_r(r,t)r^{1-d}M(r,t)r^{2-d}G(r,t)r^{d-1}\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2\sigma_d(T-t)}\int_0^\infty M_r M r^{2-d}G\mathrm{d}r \\
&= -\frac{1}{4\sigma_d(T-t)}\int_0^\infty M^2(r^{2-d}G)_r\mathrm{d}r, \\
&= \frac{1}{4\sigma_d(T-t)}\int_0^\infty M^2 r^{1-d}\left((d-2)+\frac{r^2}{2(T-t)}\right)G\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

w zmiennych radialnych:

$$
\begin{aligned}
W(t) &= \sigma_d \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_d} M_r r^{1-d} G r^{d-1} \mathrm{d}r \\
&= -\int_0^\infty M G_r \mathrm{d}r \\
&= \int_0^\infty M \frac{r}{2(T-t)} G \mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

w zmiennych radialnych:

$$\begin{aligned} W(t) &= \sigma_d \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_d} M_r r^{1-d} G r^{d-1} \mathrm{d}r \\ &= -\int_0^\infty M G_r \mathrm{d}r \\ &= \int_0^\infty M \frac{r}{2(T-t)} G \mathrm{d}r \end{aligned}$$

po zastosowaniu nierówności Cauchy'ego:

$$\begin{aligned} W^2(t) &= \left(\int_0^\infty M \frac{r}{2(T-t)} G \mathrm{d}r \right)^2 \\ &\leq \int_0^\infty M^2 r^{1-d} \left((d-2) + \frac{r^2}{2(T-t)} \right) G \mathrm{d}r \\ &\quad \times \frac{1}{2(T-t)} \int_0^\infty \frac{r^{d+1} G}{r^2 + 2(d-2)(T-t)} \mathrm{d}r \end{aligned}$$

ostatecznie:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &\geq \frac{1}{4\sigma_d(T-t)}W^2(t)\left(\int_0^\infty \frac{r^{d+1}}{2(T-t)}\frac{G}{r^2+2(d-2)(T-t)}\mathrm{d}r\right)^{-1}\\ &= \frac{\pi^{d/2}}{8\sigma_d}W^2(t)\left(\int_0^\infty \varrho^{d+1}(2(d-2)+4\varrho^2)^{-1}\mathrm{e}^{-\varrho^2}\mathrm{d}\varrho\right)^{-1}\end{aligned}$$

gdzie $\varrho = \frac{r}{2(T-t)^{1/2}}$.

Przypomnienie: $\sigma_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$, a zatem

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \geq \frac{1}{C_d}W^2(t)$$

gdzie $C_d = 16\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)^{-1}\int_0^\infty \varrho^{d+1}(2(d-2)+4\varrho^2)^{-1}\mathrm{e}^{-\varrho^2}\mathrm{d}\varrho$.

konkluzja:
jeśli $W(0) = \mathrm{e}^{T\Delta} u_0(0) \geq \frac{C_d}{T}$, to rozwiązanie wybucha dla $t \leq T$

konkluzja:
jeśli $W(0) = \mathrm{e}^{T\Delta} u_0(0) \geq \frac{C_d}{T}$, to rozwiązanie wybucha dla $t \leq T$

Równość w nierówności Cauchy'ego zachodzi gdy

$$0 \leq M(r,t) = \frac{A(t) r^d}{r^2 + 2(d-2)(T-t)} = (T-t)^{d/2-1} \frac{A(t) \varrho^d 2^d}{4\varrho^2 + 2(d-2)}$$

dla pewnego $A(t) \geq 0$. Wtedy: $W(t) = \left(\frac{1}{W(0)} - \frac{t}{C_d} \right)^{-1}$

konkluzja:
jeśli $W(0) = \mathrm{e}^{T\Delta} u_0(0) \geq \frac{C_d}{T}$, to rozwiązanie wybucha dla $t \leq T$

Równość w nierówności Cauchy'ego zachodzi gdy

$$0 \leq M(r,t) = \frac{A(t) r^d}{r^2 + 2(d-2)(T-t)} = (T-t)^{d/2-1} \frac{A(t) \varrho^d 2^d}{4\varrho^2 + 2(d-2)}$$

dla pewnego $A(t) \geq 0$. Wtedy: $W(t) = \left(\frac{1}{W(0)} - \frac{t}{C_d} \right)^{-1}$
i rozwiązanie wybucha dla

$$W(0) = \frac{1}{2T} \int_0^\infty \frac{A(0) r^{d+1}}{r^2 + 2(d-2)T} \mathrm{e}^{-r^2/(4T)} (4\pi T)^{-d/2} \mathrm{d}r = \frac{A(0)}{T} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{8\pi^{d/2}} C_d \geq \frac{C_d}{T}$$

tzn. $A(0) \geq 4\sigma_d$.

konkluzja:
jeśli $W(0) = \mathrm{e}^{T\Delta} u_0(0) \geq \frac{C_d}{T}$, to rozwiązanie wybucha dla $t \leq T$

Równość w nierówności Cauchy'ego zachodzi gdy

$$0 \leq M(r,t) = \frac{A(t) r^d}{r^2 + 2(d-2)(T-t)} = (T-t)^{d/2-1} \frac{A(t)\varrho^d 2^d}{4\varrho^2 + 2(d-2)}$$

dla pewnego $A(t) \geq 0$. Wtedy: $W(t) = \left(\frac{1}{W(0)} - \frac{t}{C_d} \right)^{-1}$
i rozwiązanie wybucha dla

$$W(0) = \frac{1}{2T} \int_0^\infty \frac{A(0) r^{d+1}}{r^2 + 2(d-2)T} \mathrm{e}^{-r^2/(4T)} (4\pi T)^{-d/2} \mathrm{d}r = \frac{A(0)}{T} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{8\pi^{d/2}} C_d \geq \frac{C_d}{T}$$

tzn. $A(0) \geq 4\sigma_d$.
Jeśli $A(t) \equiv 4\sigma_d$, to mamy jawne rozwiązanie

$$M(r,t) = \frac{4\sigma_d r^d}{r^2 + 2(d-2)(T-t)}$$

z gęstością $\frac{4(d-2)}{|x|^2} = 2u_C(x)$ dla $t \nearrow T$.

Modele z dyfuzją opisaną ułamkowym laplasjanem

$$\begin{aligned} u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u + \nabla \cdot (u \nabla v) &= 0, \\ \Delta v + u &= 0, \end{aligned}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0,$$

$(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T)$, $d \geq 2$, $\alpha \in (0,2]$

Czy istnieje krytyczna wielkość, która decyduje o wybuchu rozwiązań?

Modele z dyfuzją opisaną ułamkowym laplasjanem

$$\begin{aligned} u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u + \nabla \cdot (u \nabla v) &= 0, \\ \Delta v + u &= 0, \end{aligned}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0,$$

$(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T)$, $d \geq 2$, $\alpha \in (0,2]$

Czy istnieje krytyczna wielkość, która decyduje o wybuchu rozwiązań?

naturalne skalowanie dla układu
$u_\lambda(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda x, \lambda^\alpha t)$,

Modele z dyfuzją opisaną ułamkowym laplasjanem

$$\begin{aligned} u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u + \nabla \cdot (u \nabla v) &= 0, \\ \Delta v + u &= 0, \end{aligned}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0,$$

$(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T)$, $d \geq 2$, $\alpha \in (0,2]$

Czy istnieje krytyczna wielkość, która decyduje o wybuchu rozwiązań?

naturalne skalowanie dla układu
$u_\lambda(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda x, \lambda^\alpha t)$, $\int u_\lambda \mathrm{d}x = \lambda^{\alpha-2} \int u \mathrm{d}x$,

Modele z dyfuzją opisaną ułamkowym laplasjanem

$$\begin{aligned} u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u + \nabla \cdot (u \nabla v) &= 0, \\ \Delta v + u &= 0, \end{aligned}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0,$$

$(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T)$, $d \geq 2$, $\alpha \in (0,2]$

Czy istnieje krytyczna wielkość, która decyduje o wybuchu rozwiązań?

naturalne skalowanie dla układu
$u_\lambda(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda x, \lambda^\alpha t)$, $\int u_\lambda \mathrm{d}x = \lambda^{\alpha-2} \int u \mathrm{d}x$,

$$G_t - (-\Delta)^{\alpha/2} G = 0, \quad G(.,T) = \delta_0$$

$$W(t) = \int G(x,t) u(x,t) \mathrm{d}x$$

Modele z dyfuzją opisaną ułamkowym laplasjanem

$$\begin{aligned} u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u + \nabla \cdot (u \nabla v) &= 0, \\ \Delta v + u &= 0, \end{aligned}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0,$$

$(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T)$, $d \geq 2$, $\alpha \in (0,2]$

Czy istnieje krytyczna wielkość, która decyduje o wybuchu rozwiązań?

naturalne skalowanie dla układu
$u_\lambda(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda x, \lambda^\alpha t)$, $\int u_\lambda \mathrm{d}x = \lambda^{\alpha-2} \int u \mathrm{d}x$,

$$G_t - (-\Delta)^{\alpha/2} G = 0, \quad G(.,T) = \delta_0$$

$$W(t) = \int G(x,t) u(x,t) \mathrm{d}x$$

$$G(x,t) = (T-t)^{-d/\alpha} R\left(\frac{|x|}{(T-t)^{1/\alpha}}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \geq \frac{1}{C_{d,\alpha}} W^2(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \geq \frac{1}{C_{d,\alpha}} W^2(t)$$

$$C_{d,\alpha} = 2\sigma_d \int_0^\infty \frac{|R'(\varrho)|^2}{\left|\frac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho^{1-d} R'(\varrho))\right|} \mathrm{d}\varrho$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \geq \frac{1}{C_{d,\alpha}} W^2(t)$$

$$C_{d,\alpha} = 2\sigma_d \int_0^\infty \frac{|R'(\varrho)|^2}{\left|\frac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho^{1-d} R'(\varrho))\right|} \mathrm{d}\varrho$$

warunek na wybuch:

$$T \mathrm{e}^{-T(-\Delta)^{\alpha/2}} u_0(0) \geq C_{d,\alpha}$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \geq \frac{1}{C_{d,\alpha}} W^2(t)$$

$$C_{d,\alpha} = 2\sigma_d \int_0^\infty \frac{|R'(\varrho)|^2}{\left|\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho^{1-d} R'(\varrho))\right|} \mathrm{d}\varrho$$

warunek na wybuch:

$$T \mathrm{e}^{-T(-\Delta)^{\alpha/2}} u_0(0) \geq C_{d,\alpha}$$

równowazny z

$$\|u_0\|_{M^{d/\alpha}} \gg 1$$

Literatura

- P. Biler, T. Cieślak, G. Karch, J. Zienkiewicz, *Local criteria for blowup of solutions in two-dimensional chemotaxis models*, Disc. Cont. Dynam. Syst. A **37** (2017), 1841–1856.
- P. Biler, G. Karch, Ph. Laurençot, T. Nadzieja, *The* 8π*-problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in a disc*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **27** (2006), 133–147.
- P. Biler, G. Karch, *Blowup of solutions to generalized Keller–Segel model*, J. Evol. Equ. **10** (2010), 247–262.

- P. Biler, G. Karch, J. Zienkiewicz, Optimal criteria for blowup of radial and *N*-symmetric solutions of chemotaxis systems, Nonlinearity **28** (2015), 4369-4387.
- P. Biler, G. Karch, J. Zienkiewicz, *Morrey spaces norms and criteria for blowup in chemotaxis models*, Networks and NonHomogeneous Media **11** (2016), 239–250.
- H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **13** (1966), 109–124.

- Y. Giga, R. V. Kohn, *Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 297–319.
- P.-G. Lemarié-Rieusset, *Small data in an optimal Banach space for the parabolic-parabolic and parabolic-elliptic Keller-Segel equations in the whole space*, Adv. Diff. Eq. **18** (2013), 1189–1208.
- N. Mizoguchi, *Blowup behavior of solutions for a semilinear heat equation with supercritical nonlinearity*, J. Diff. Eq. **205** (2004), 298–328.

- P. Quittner, Ph. Souplet, *Superlinear parabolic problems. Blow-up, global existence and steady states*, Birkhäuser Advanced Texts, 2007.
- Ph. Souplet, *Morrey spaces and classification of global solutions for a supercritical semilinear heat equation in $\mathbb{R}^n$*, J. Functional Analysis **272** (2017), 2005–2037.
- F. B. Weissler, *Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation*, Israel J. Math. **38** (1981), 29–40.