

# Jak zaprojektować powierzchnię gładką

Przemysław Kiciak

Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki

Uniwersytet Warszawski

**Gładkość powierzchni** może być rozpatrywana na dwóch poziomach:

- mikroskopowym — psują ją osobliwości takie jak chropowatość albo nieciągłość płaszczyzny stycznej lub krzywizny,
- makroskopowym — psują ją zafalowania, spłaszczenia, samoprzecięcia.

Gładkość na poziomie **mikroskopowym** można zapewnić przez zadbanie o wystarczającą klasę ciągłości geometrycznej.

**Definicja 1** *Niech  $n \geq 1$ . Powierzchnia  $\mathcal{M}$  wykazuje **ciągłość geometryczną rzędu  $n$**  (jest klasy  $G^n$ ), jeśli dla każdego punktu tej powierzchni istnieje w otoczeniu tego punktu lokalna regularna parametryzacja klasy  $C^n$ .*

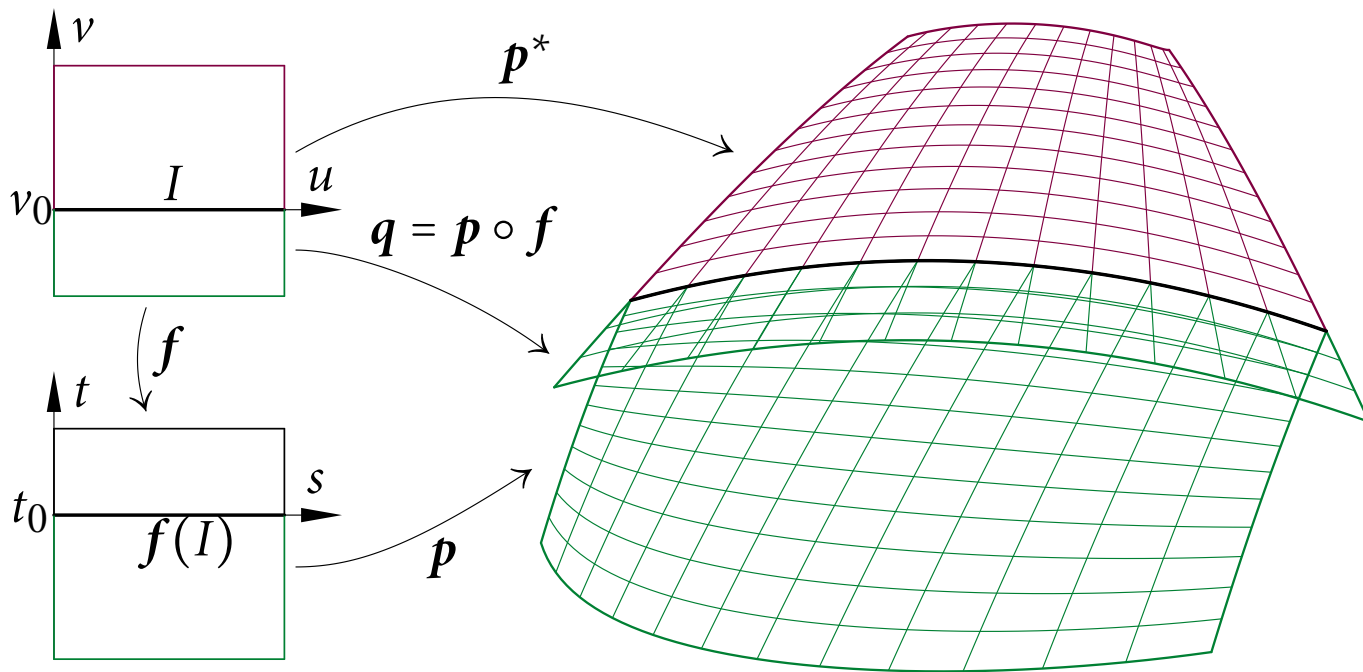
W praktyce stosuje się powierzchnie sklejane złożone z płatów parametrycznych klasy  $C^\infty$ . Trzeba zadbać o to, aby ich parametryzacje były regularne i aby odpowiednie parametryzacje istniały w otoczeniu punktów wspólnych brzegów tych płatów.

Gładkość na poziomie **makroskopowym** można osiągnąć przez optymalizację ze względu na pewną miarę jakości powierzchni. Zwykle jest to funkcjonal opisujący „brzydkość” powierzchni, która jest tym większa, im większe są zafalowania lub inne wady kształtu.

Optymalizacja może dotyczyć *parametryzacji* powierzchni (jej dobry kształt jest wtedy efektem ubocznym optymalizacji) albo bezpośrednio *kształtu*. Pierwsze podejście jest prostsze. Drugie podejście może dać lepsze rezultaty.

# Gładkie sklejenie par płatów

Aby zapewnić gładkie sklejenie dwóch regularnych płatów parametrycznych wzdłuż wspólnego brzegu, należy zadbać o istnienie takiej funkcji reparametryzacji jednego z nich, aby powstała funkcja sklejana klasy  $C^n$ .



Wspólna krzywa brzegowa powstaje przez obcięcie oryginalnych parametryzacji płatów do  $v = v_0$  i  $t = t_0$ ; zakładam, że oba obcięcia dają identyczną parametryzację tej krzywej. **Równanie ciągłości pozycyjnej**

$$\bar{\mathbf{p}}(s) = \underline{\mathbf{p}}^*(u) \quad \text{dla każdego } s = u$$

zapiszę w skrócie tak:  $\bar{\mathbf{p}} = \underline{\mathbf{p}}^*$ .

Niech  $\mathbf{f}(u, v) = (s(u, v), t(u, v))$  i niech

$$\mathbf{q}(u, v) = \mathbf{p}(s(u, v), t(u, v)).$$

Różniczkowanie ze względu na parametr  $v$  i obcięcie daje **pochodne w kierunku poprzecznym do brzegu**:

$$\bar{\mathbf{q}}_v = \bar{s}_v \bar{\mathbf{p}}_s + \bar{t}_v \bar{\mathbf{p}}_t,$$

$$\bar{\mathbf{q}}_{vv} = \bar{s}_{vv} \bar{\mathbf{p}}_s + \bar{t}_{vv} \bar{\mathbf{p}}_t + \bar{s}_v^2 \bar{\mathbf{p}}_{ss} + 2\bar{s}_v \bar{t}_v \bar{\mathbf{p}}_{st} + \bar{t}_v^2 \bar{\mathbf{p}}_{tt}$$

itd. (w miarę potrzeb, ale na ogół powyższe wzory wystarczają w zastosowaniach praktycznych).

Równania ciągłości geometrycznej dostaniemy, żądając, aby zachodziły równości

$$\underline{\mathbf{p}}^* = \bar{\mathbf{p}},$$

$$\underline{\mathbf{p}}_v^* = \bar{s}_v \bar{\mathbf{p}}_s + \bar{t}_v \bar{\mathbf{p}}_t,$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{vv}^* = \bar{s}_{vv} \bar{\mathbf{p}}_s + \bar{t}_{vv} \bar{\mathbf{p}}_t + \bar{s}_v^2 \bar{\mathbf{p}}_{ss} + 2\bar{s}_v \bar{t}_v \bar{\mathbf{p}}_{st} + \bar{t}_v^2 \bar{\mathbf{p}}_{tt} \quad \text{itd.},$$

co oznacza nałożenie na płat  $\mathbf{p}^*$  warunków interpolacyjnych. Można przyjąć arbitralnie odpowiednio gładkie funkcje  $s_i, t_i$ , opisujące obciążenia pochodnych funkcji  $s$  i  $t$ . Wtedy mamy równania

$$\underline{\mathbf{p}}^* = \bar{\mathbf{p}},$$

$$\underline{\mathbf{p}}_v^* = s_1 \bar{\mathbf{p}}_s + t_1 \bar{\mathbf{p}}_t,$$

$$\underline{\mathbf{p}}_{vv}^* = s_2 \bar{\mathbf{p}}_s + t_2 \bar{\mathbf{p}}_t + s_1^2 \bar{\mathbf{p}}_{ss} + 2s_1 t_1 \bar{\mathbf{p}}_{st} + t_1^2 \bar{\mathbf{p}}_{tt} \quad \text{itd.}$$

Dla wielomianowych pól  $\mathfrak{p}$  i  $\mathfrak{p}^*$  funkcje  $s_i, t_i$  muszą być wymierne, przy czym algebraiczną stabilność konstrukcji zapewniają tylko funkcje wielomianowe. Ale pola w powyższym podejściu są traktowane niesymetrycznie: do pola danego  $\mathfrak{p}$  „doklejamy” pole  $\mathfrak{p}^*$ , którego stopień „wychodzi” wyższy od stopnia pola  $\mathfrak{p}$ .

Symetrię konstrukcji dostaniemy, przyjmując, że pole  $\mathfrak{p}$  jest *pomocniczy* i konstruując *dwa pola docelowe*  $\mathfrak{p}^*$ . Oba będą gładko połączone z  $\mathfrak{p}$ , czyli także ze sobą. Funkcje  $t_1$  dla obu tych pól muszą mieć przeciwne znaki.



## Metody siatek

Powierzchnie sklejane o arbitralnej topologii wygodnie jest reprezentować za pomocą **siatek**. Siatka składa się z wierzchołków, krawędzi i ścian.

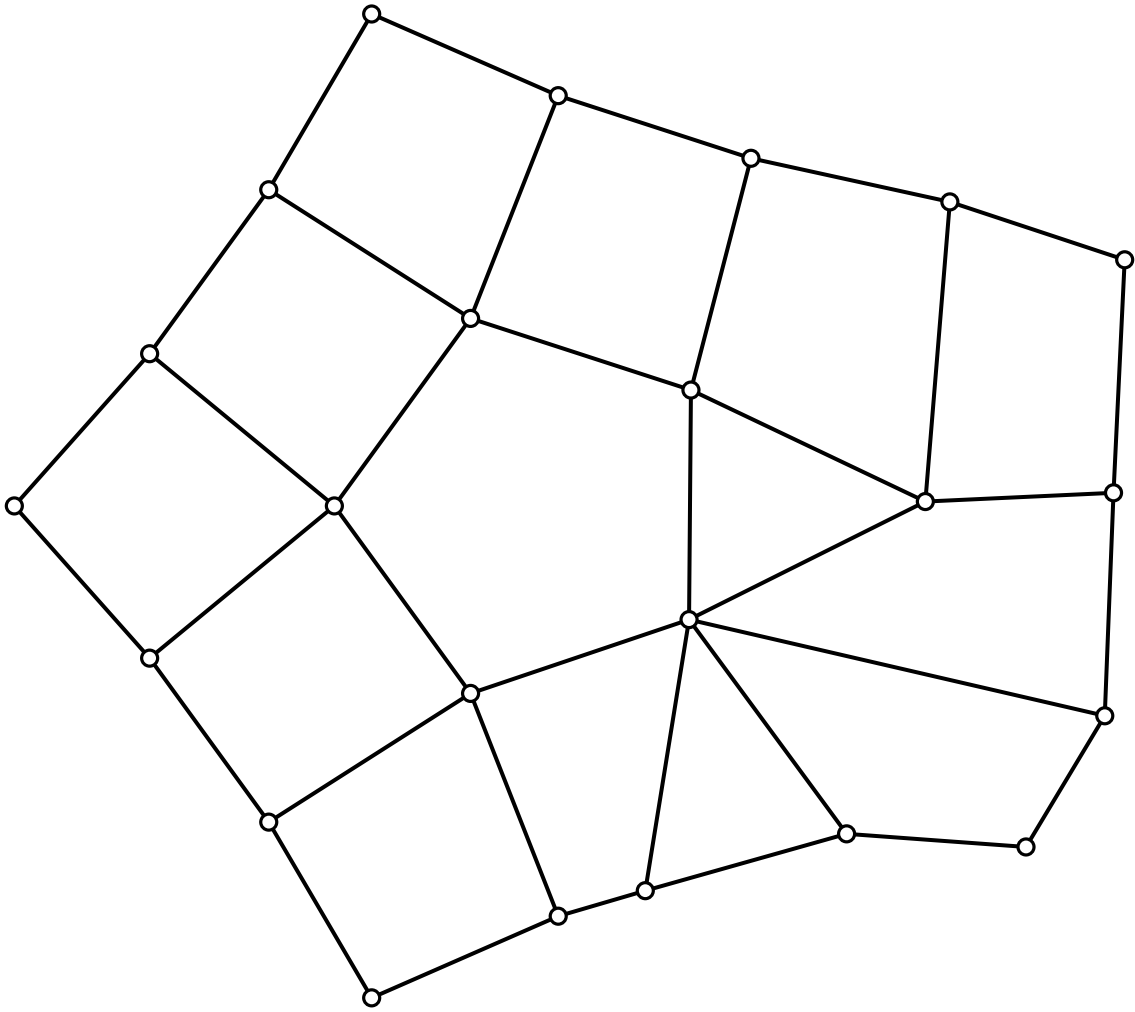
**Wierzchołek** ma określone położenie w przestrzeni.

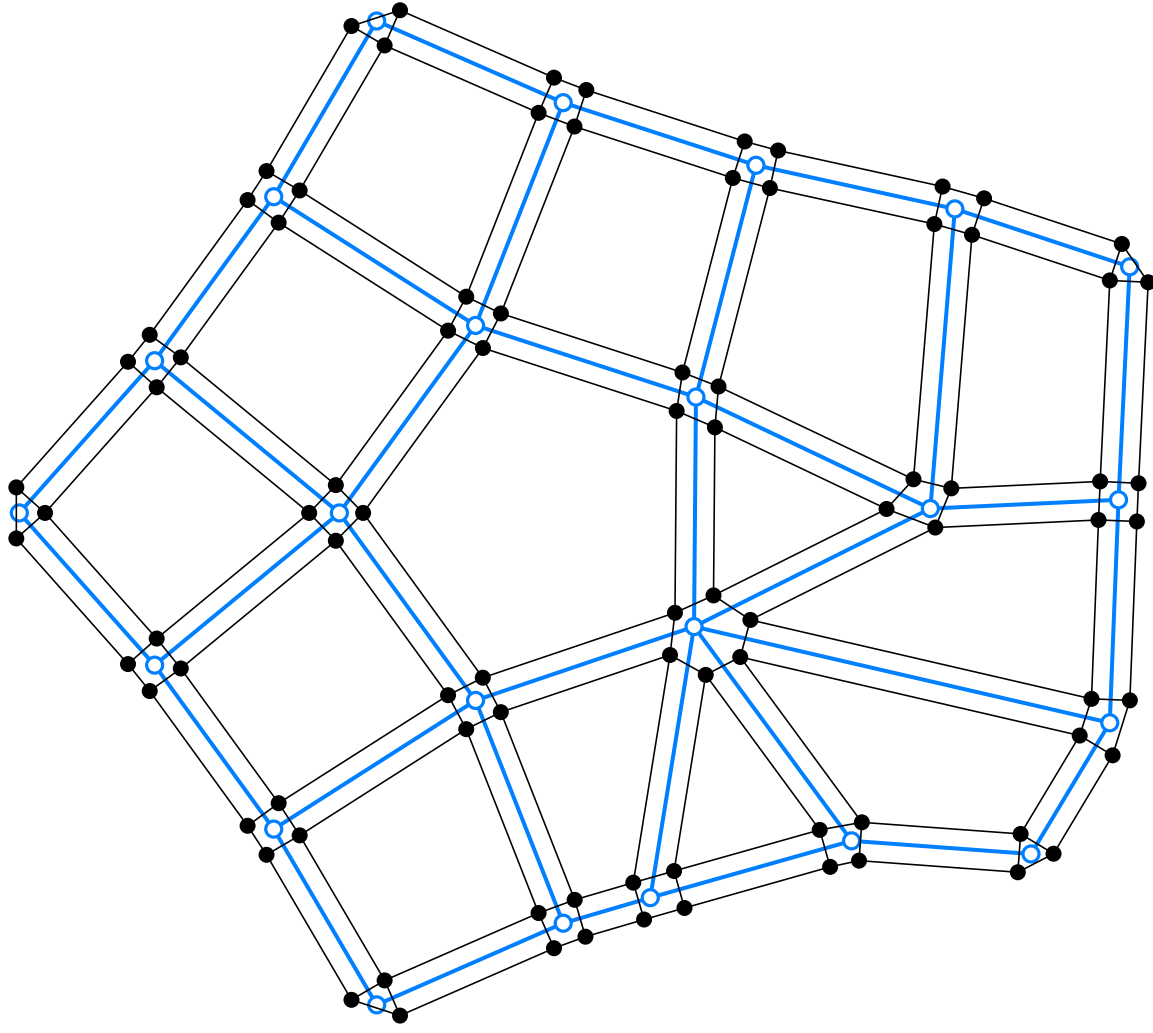
**Krawędź** jest odcinkiem, którego końce są wierzchołkami.

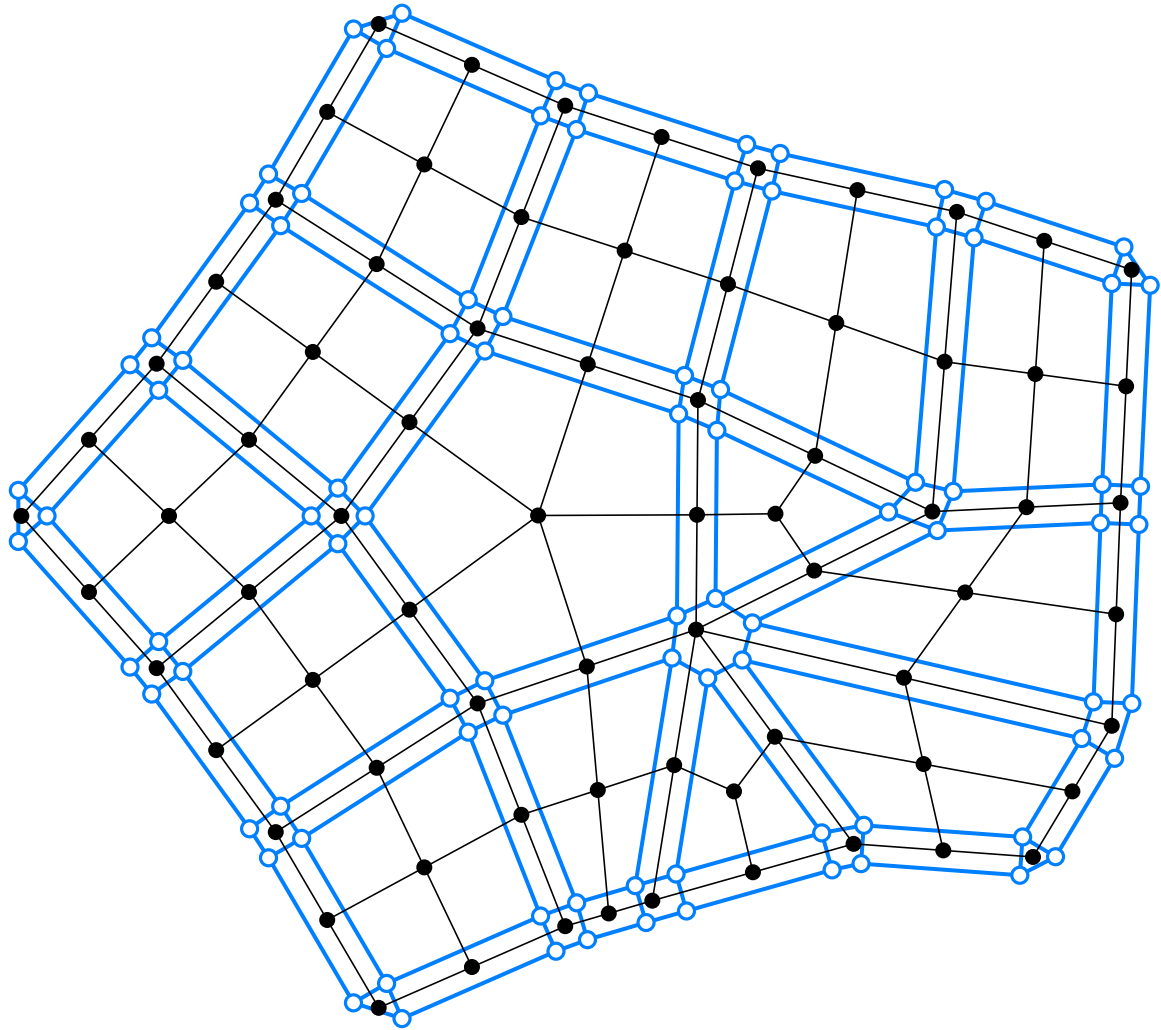
**Ściana** jest łamaną zamkniętą zbudowaną z co najmniej trzech krawędzi.

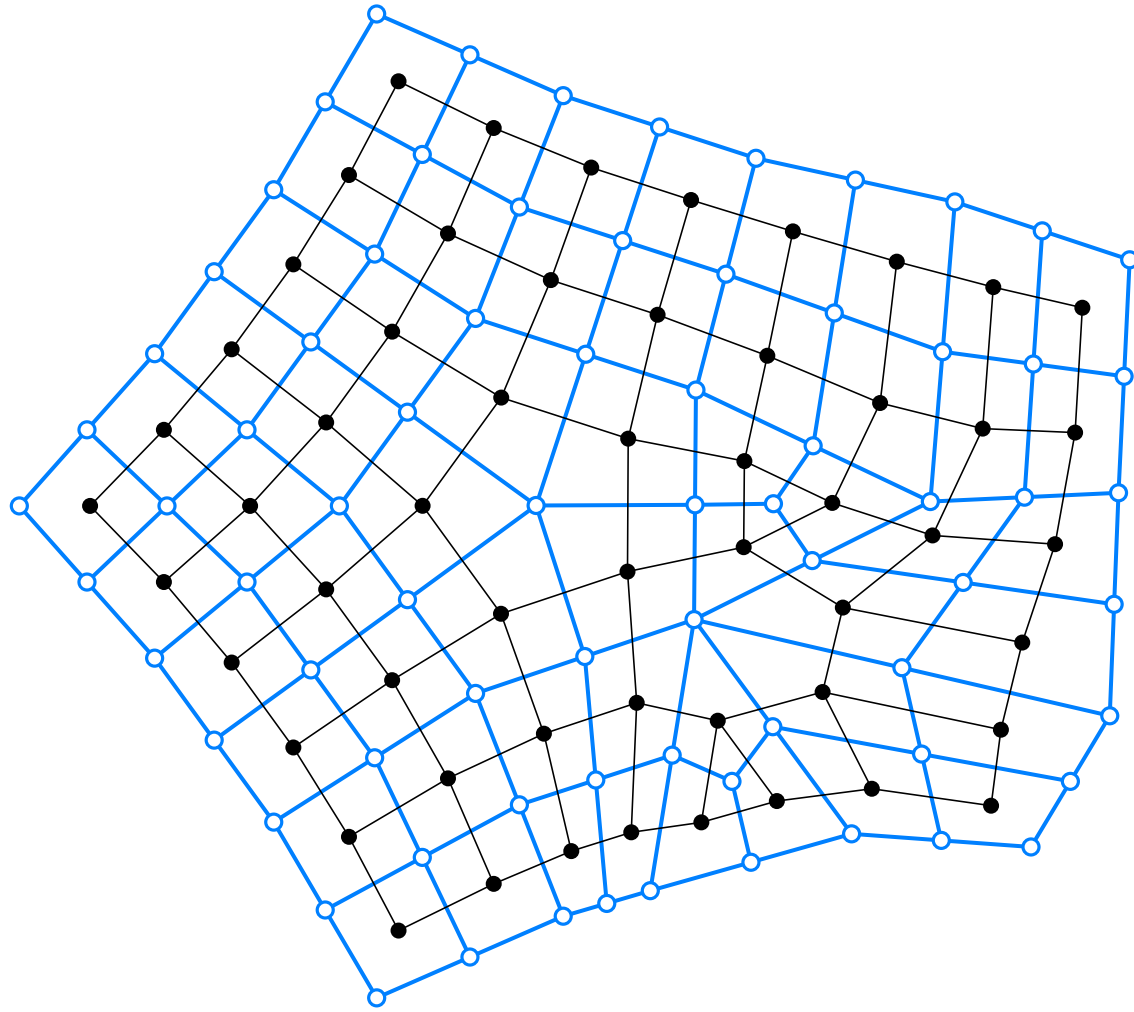
Krawędź może należeć tylko do jednej albo dwóch ścian. Ściany spotykające się w wierzchołku muszą tworzyć ciąg, w którym każde kolejne dwie mają wspólną krawędź. Dwie ściany mogą mieć co najwyżej jedną wspólną krawędź i co najwyżej dwa wspólne wierzchołki.

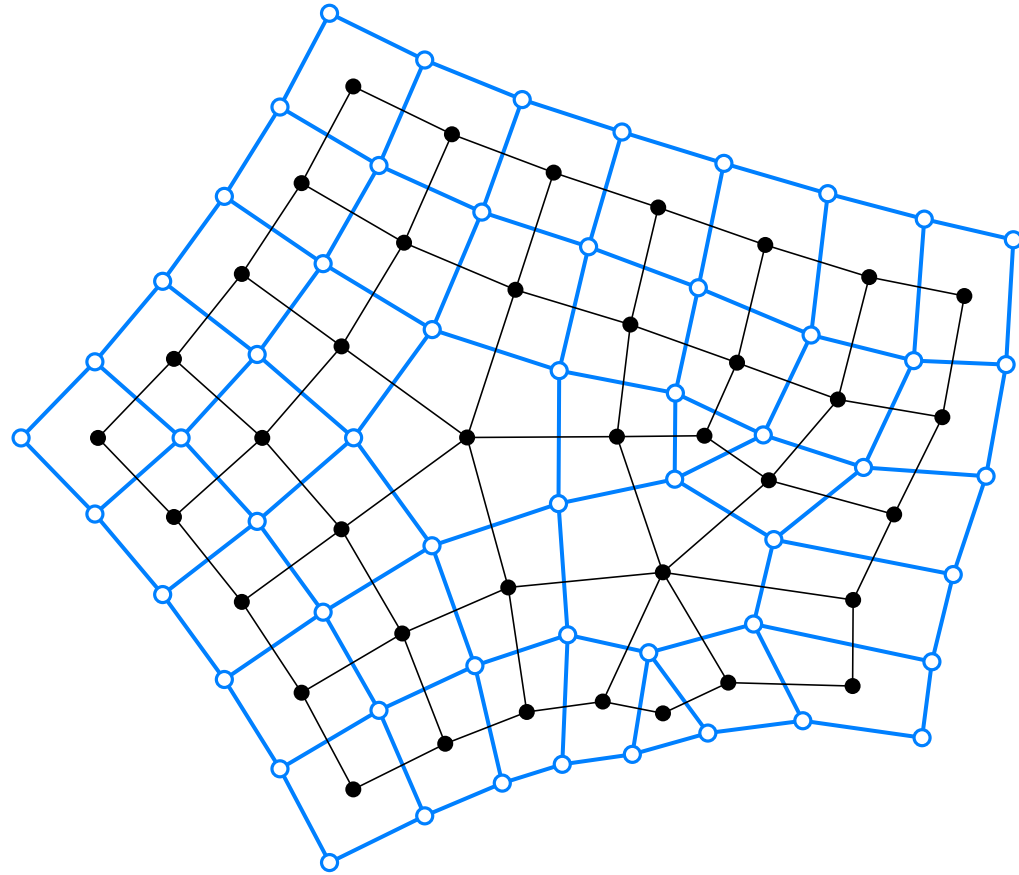
Operacja zagęszczania siatki składa się z kroków zwanych **podwajaniem** i **uśrednianiem**.

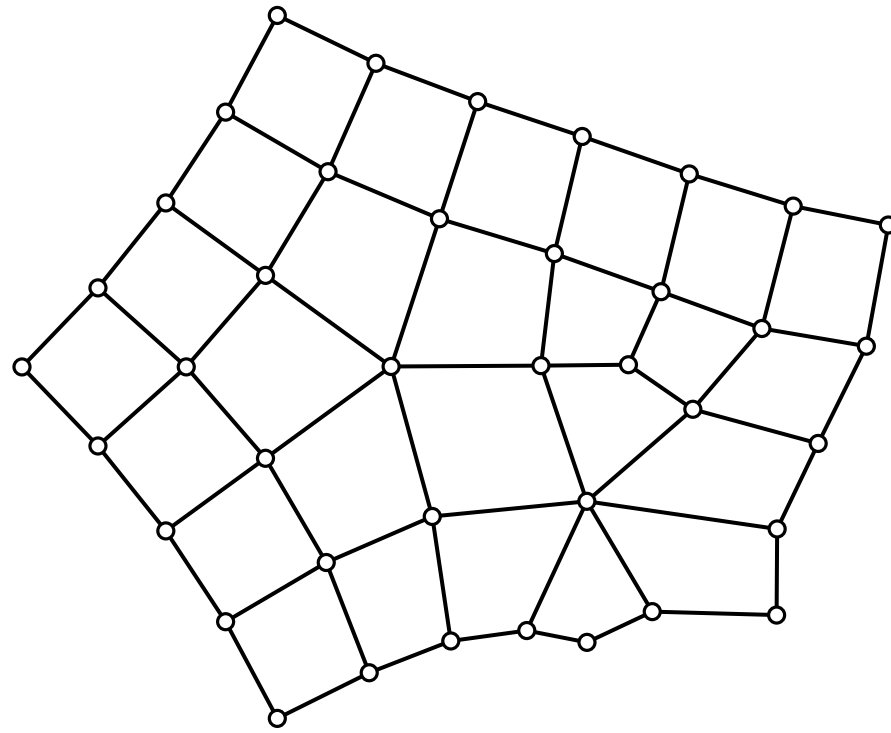






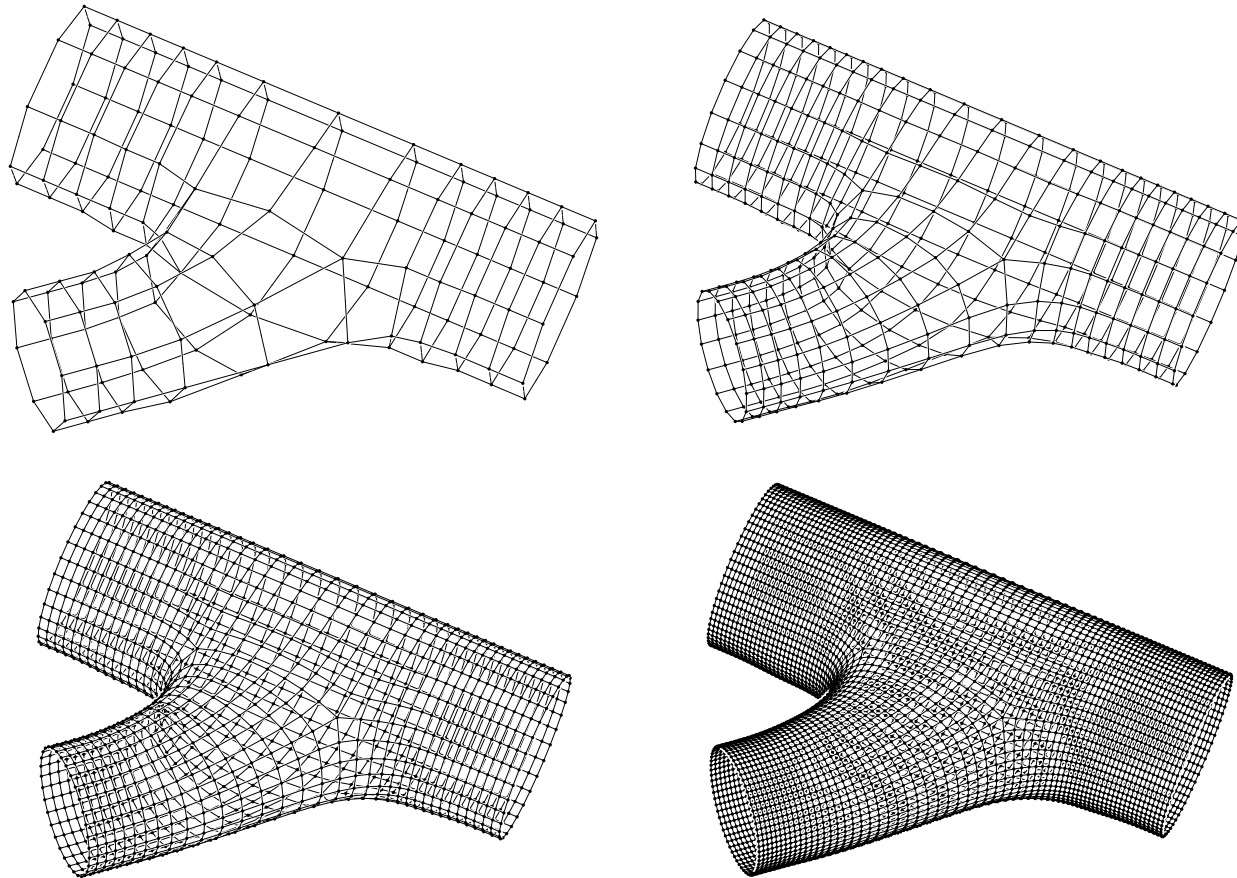




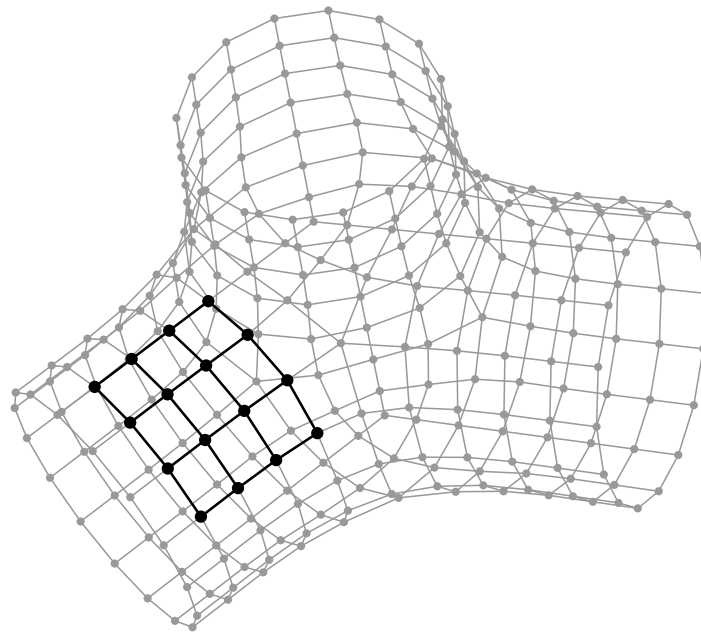




Dowodzi się, że iterowanie operacji zagęszczania, z których każda składa się z podwajania, po którym następuje  $n$  kroków uśredniania, wytwarza ciąg siatek zbieżny do powierzchni składającej się z wielomianowych płatów tensorowych stopnia  $(n, n)$ .

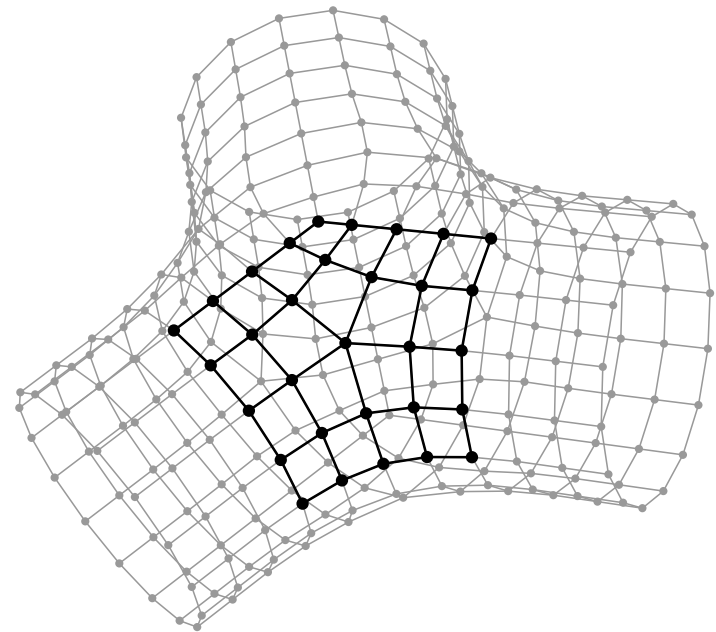
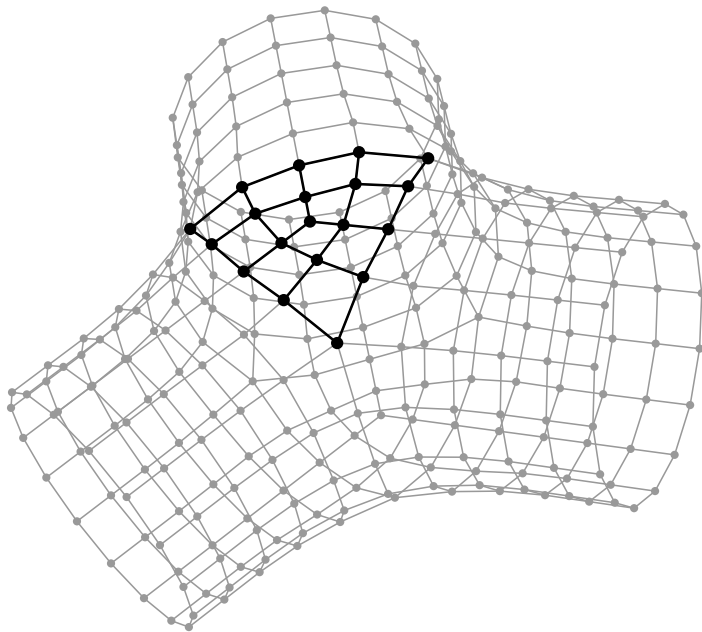


W kolejnych siatkach można wyróżnić siatki, których wierzchołki są (wektorowymi) współczynnikami tych płatów w tensorowej bazie B-sklejanej, oraz tzw. **siatki Sabina**, otaczające **elementy specjalne**: wierzchołki incydentne z inną niż 4 liczbą krawędzi albo ściany nie-czworokątne.



Jeśli  $n$  jest nieparzyste, to wszystkie elementy specjalne są wierzchołkami, a w przeciwnym razie wszystkie są ścianami.

Liczba elementów specjalnych w kolejnych siatkach otrzymanych przez zagęszczanie może tylko maleć lub pozostawać niezmienną.



# Projektowanie powierzchni gładkiej

1. Wybierz siatkę początkową, która ustala topologię powierzchni.
2. Wykonaj pewną liczbę zagęszczeń.
3. Skoryguj i ustal położenia wybranych wierzchołków siatki (w szczególności tych, które wyznaczają brzeg powierzchni).
4. Wykonaj optymalizację wybranej miary jakości powierzchni, dobierając położenia pozostałych wierzchołków.

Przed wykonaniem tego algorytmu trzeba rozwiązać problem określenia fragmentów powierzchni w otoczeniu elementów specjalnych.

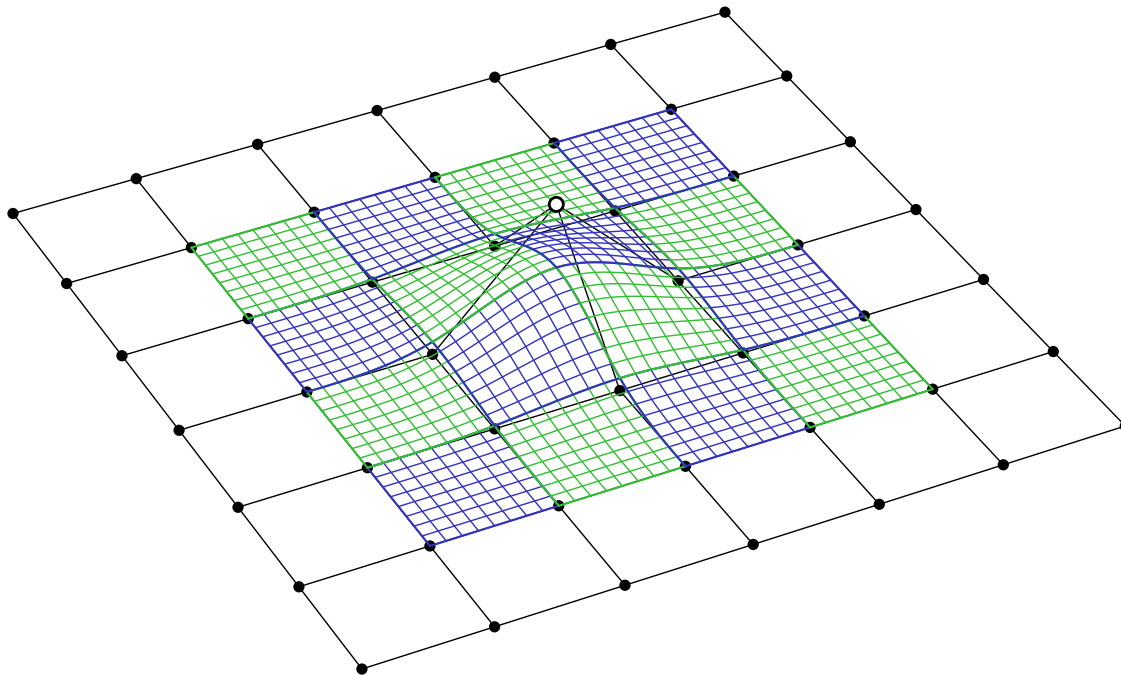
W powierzchni granicznej fragmenty te składają się z przeliczalnej rodziny płatów wielomianowych stopnia  $(n, n)$ , wypełniających otwory w powierzchni.

W mojej konstrukcji (dla  $n = 3$ )  $k$ -kątny otwór w powierzchni jest wypełniany powierzchnią sklejoną z  $k$  płatów stopnia  $(9, 9)$ , z zachowaniem ciągłości geometrycznej rzędu 2.

Aby rozwiązać zadanie, należy skonstruować przestrzeń liniową  $V$ , której elementy są funkcjami rzeczywistymi określonymi na rozmaitości  $\mathcal{D}$  zbudowanej z kwadratów jednostkowych: obcięcie każdej z tych funkcji do dowolnego kwadratu jest wielomianem stopnia  $(3, 3)$  albo  $(9, 9)$ . Poszczególne kwadraty odpowiadają ścianom siatki *nie mającym krawędzi brzegowych* i mają utożsamione krawędzie brzegowe tak jak odpowiadające im ściany siatki.

Przestrzeń ta ma następującą **własność  $G^2$** : dla każdej pary kwadratów mających utożsamione krawędzie istnieje taka reparametryzacja określona w tych kwadratach, że złożenie jej z obcięciem dowolnej funkcji z przestrzeni  $V$  do tych kwadratów daje funkcję klasy  $C^2$ . Ponadto dla dowolnego punktu z tych kwadratów można znaleźć w  $V$  takie dwie funkcje, których gradienty w tym punkcie są liniowo niezależne.

Wielomiany bikubiczne opisujące funkcje — elementy bazy przestrzeni  $V$  — powstają z obcięcia do kwadratu jednostkowego bikubicznej tensorowej funkcji B-sklejanej z węzłami będącymi kolejnymi liczbami całkowitymi. Jest 16 niezerowych wielomianów otrzymanych w ten sposób, a zatem w każdym kwadracie rozmaitości  $\mathcal{D}$ , w którym funkcje z przestrzeni  $V$  są bikubiczne, jest 16 niezerowych funkcji należących do konstruowanej bazy.



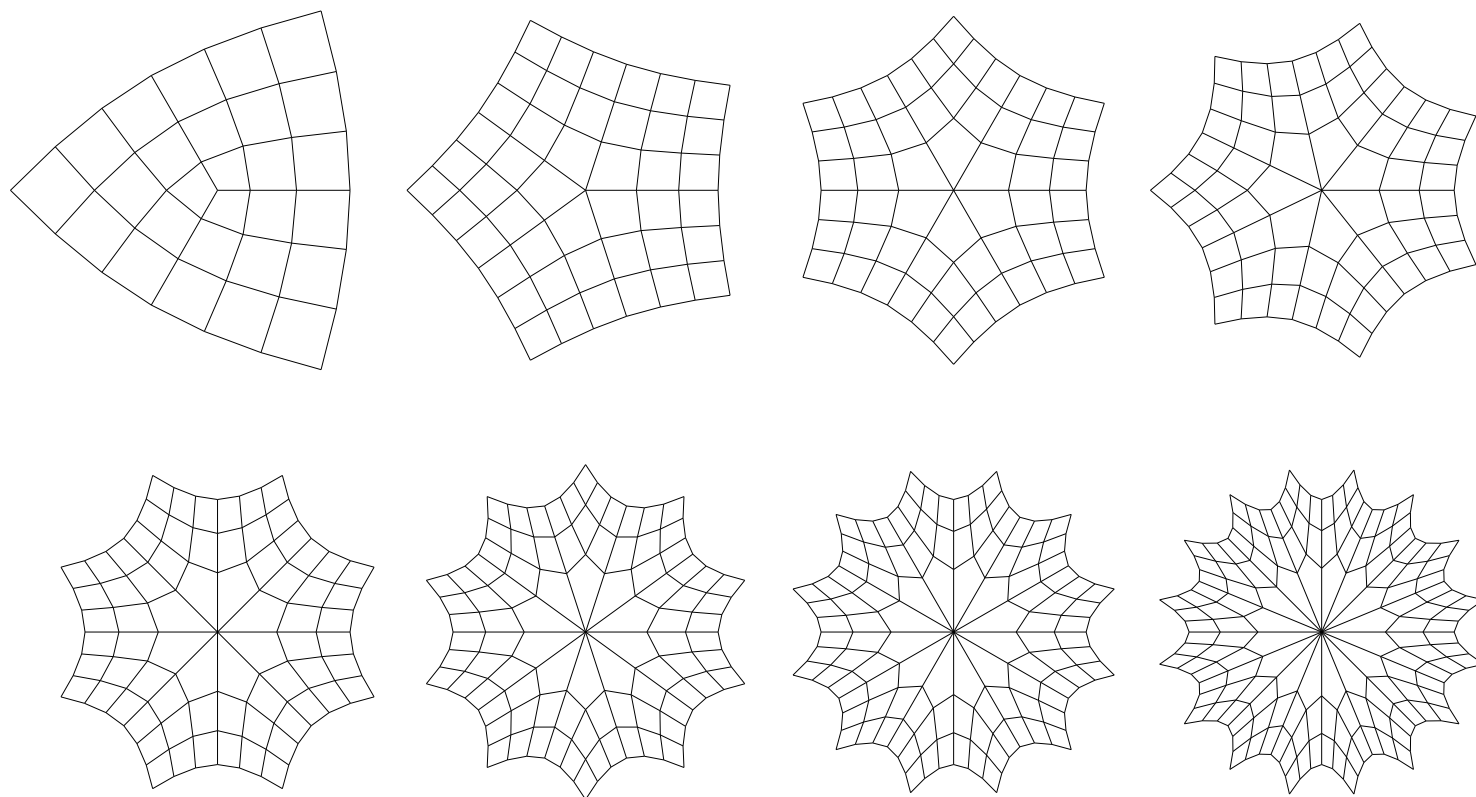
Dla elementu specjalnego — wierzchołka stopnia  $k \neq 4$  — jest  $k$  kwadratów *specjalnych*, w których funkcje są wielomianami stopnia  $(9, 9)$ ; do tych kwadratów przylega  $3k$  kwadratów, w których funkcje z przestrzeni  $V$  są bikubiczne.

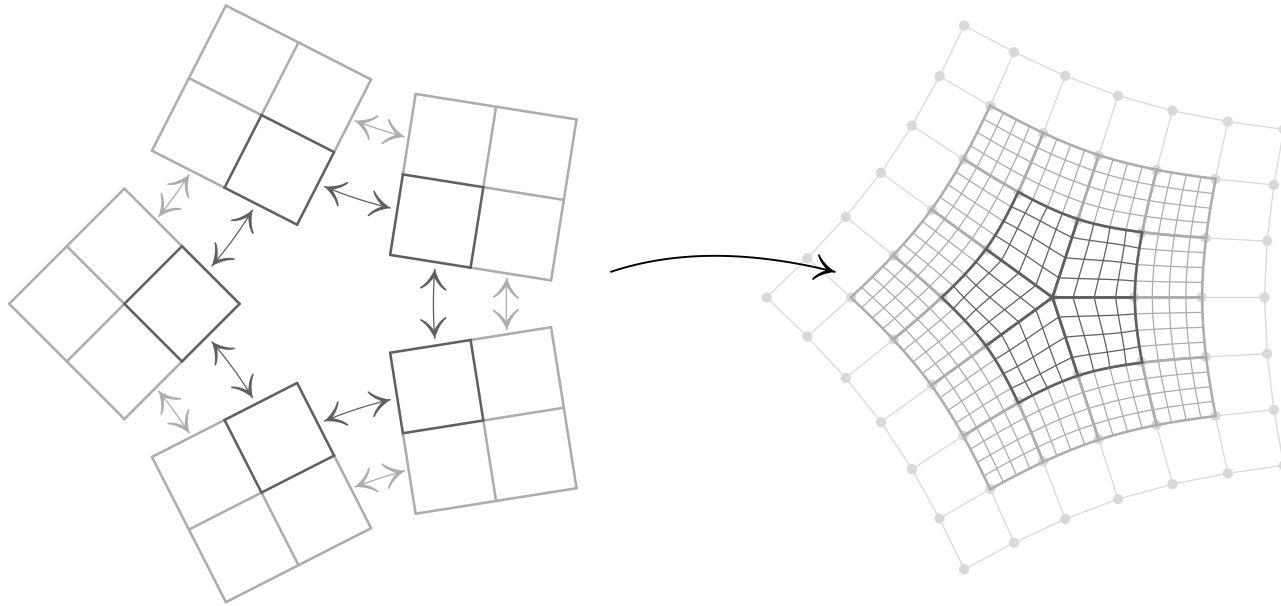
Istnieje  $6k + 1$  funkcji związanych z wierzchołkami siatki Sabina będących niezerowymi wielomianami stopnia  $(3, 3)$  na brzegu co najmniej jednego kwadratu specjalnego. Funkcje te należy odpowiednio przedłużyć na te kwadraty, aby otrzymać elementy bazy przestrzeni  $V$ .

Na razie podam tylko niezbędne minimum szczegółów, resztę później.



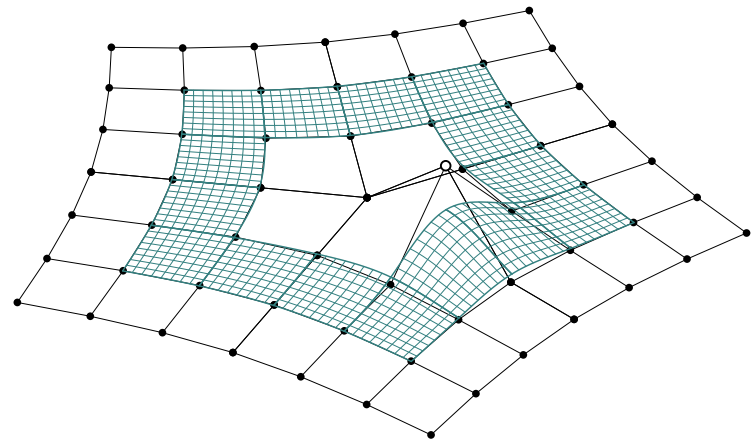
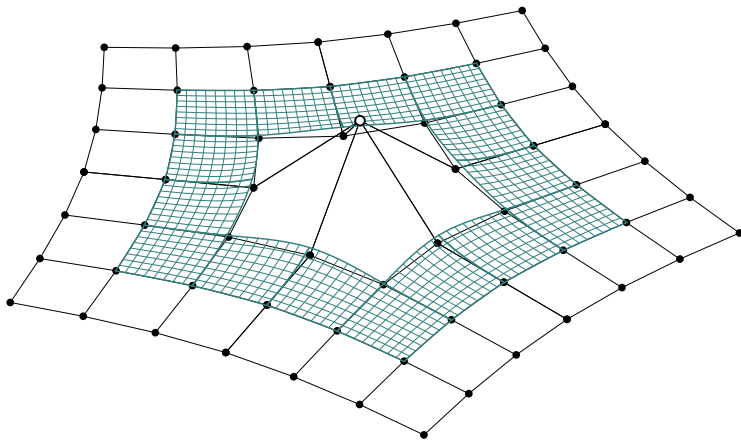
Ustalana jest **siatka dziedziny** — jest to płaska siatka Sabina będąca wektorem własnym operatora zagęszczania złożonego z wycinaniem odpowiedniego fragmentu.





Siatka dziedziny określa jest pewien wielokąt krzywoliniowy  $A \subset \mathbb{R}^2$ , sparametryzowany kawałkami nad tymi  $k$  kwadratami specjalnymi i  $3k$  kwadratami przyległymi. Jego część sparametryzowana nad kwadratami specjalnymi jest oznaczona  $\Omega$ .

$3k$  płaskich płątów bikubicznych reprezentowanych przez regularne podsiatki określa parametryzacje fragmentów obszaru  $A \setminus \Omega$  nad odpowiednimi kwadratami rozmaitości  $\mathcal{D}$ . Wielomiany bikubiczne określone przez związaną z jednym wierzchołkiem siatki Sabina tensorową bikubiczną funkcję B-sklejaną wyznaczają odpowiednią funkcję bazową w  $A \setminus \Omega$ .

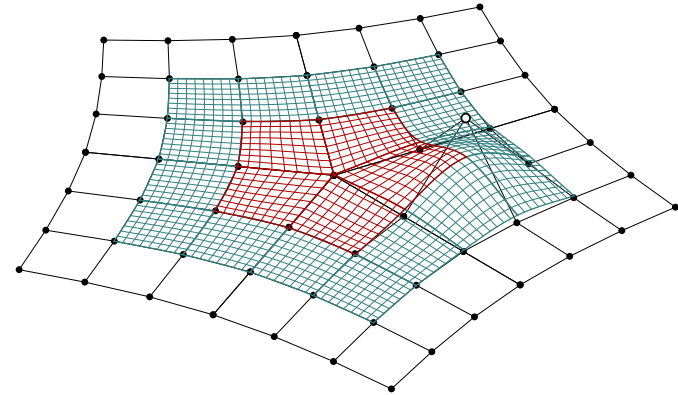
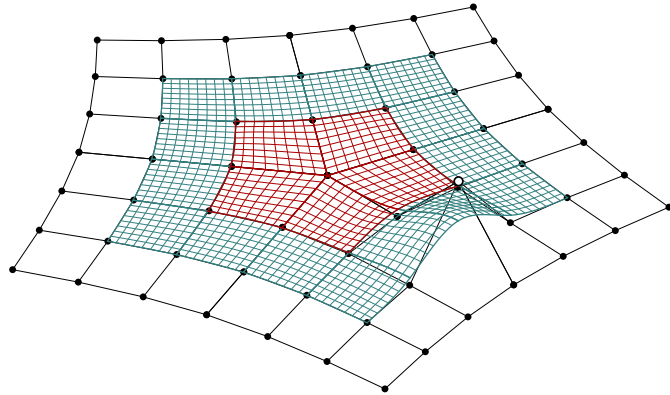
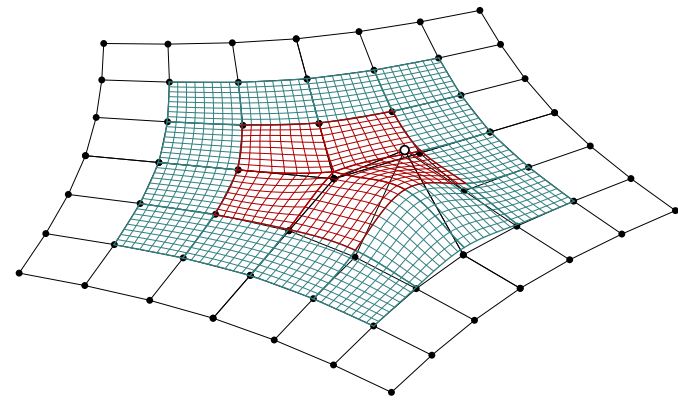
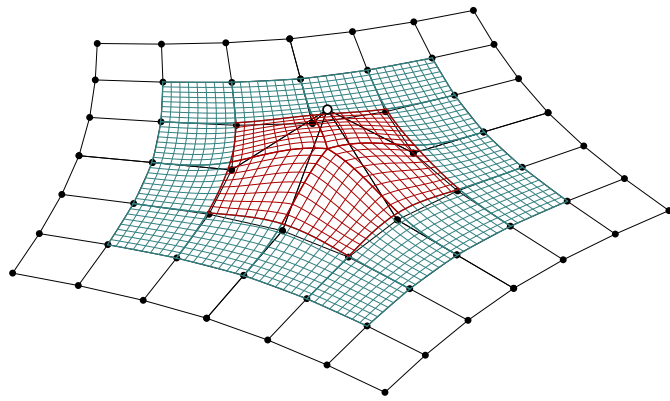


W obszarze  $A$  określa się bazę pewnej pomocniczej przestrzeni liniowej, której elementy są opisane kawałkami. Obszar  $\Omega$  składa się z czworokątów krzywoliniowych sparametryzowanych nad kwadratami secjalnymi.

W każdym z nich przyjęty jest wielomian stopnia  $(9, 9)$ , którego wartości są wartościami funkcji w odpowiednich punktach  $\Omega$ . Wielomiany są tak dobrane, aby funkcje były klasy  $C^2(A)$ .

Funkcje bazowe otrzymuje się przez numeryczne rozwiązanie zagadnienia brzegowego Dirichleta dla równania trójharmonicznego:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta^3 p(x, y) = 0 & \text{dla } (x, y) \in \Omega, \\ p(x, y) = \hat{s}(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = \frac{\partial \hat{s}}{\partial \mathbf{n}}(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Gamma, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial \mathbf{n}^2}(x, y) = \frac{\partial^2 \hat{s}}{\partial \mathbf{n}^2}(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Gamma. \end{array} \right.$$



Otrzymane w ten sposób funkcje, razem z tensorowymi funkcjami stopnia  $(3, 3)$  tworzą bazę przestrzeni  $V$ . Ich suma w każdym punkcie rozmaitości  $\mathcal{D}$  jest równa 1.

## Kryterium optymalizacji

Za miarę jakości kształtu powierzchni można przyjąć funkcjonal

$$\Psi(\mathcal{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{M}} \|\nabla_{\mathcal{M}} H\|_2^2 d\mathcal{M}.$$

Symbol  $\mathcal{M}$  oznacza powierzchnię,  $H$  jest to jej krzywizna średnia, zaś operator  $\nabla_{\mathcal{M}}$  jest gradientem na tej powierzchni. Całkowanie odbywa się względem „zwykłej” miary powierzchni  $\mathcal{M}$ .

Powyższy wzór może być przekształcony do postaci

$$\Psi(\mathcal{M}) = S(\mathbf{p}) = \int_{\mathcal{D}} (\nabla H) G^{-1} (\nabla H)^T \sqrt{\det G} \, d\mathcal{D},$$

w której argumentem jest parametryzacja  $\mathbf{p}$  powierzchni  $\mathcal{M}$  nad rozmaitością  $\mathcal{D}$ .

Krzywizna średnia  $H$  jest określona wzorem

$$H = \frac{1}{2 \det G} \left( \det \begin{bmatrix} b_{11} & g_{12} \\ b_{12} & g_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} g_{11} & b_{12} \\ g_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \right),$$
$$g_{11} = \langle \mathbf{p}_u, \mathbf{p}_u \rangle, \quad g_{12} = \langle \mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v \rangle, \quad g_{22} = \langle \mathbf{p}_v, \mathbf{p}_v \rangle,$$
$$b_{11} = \langle \mathbf{p}_{uu}, \mathbf{n} \rangle, \quad b_{12} = \langle \mathbf{p}_{uv}, \mathbf{n} \rangle, \quad b_{22} = \langle \mathbf{p}_{vv}, \mathbf{n} \rangle,$$

zatem funkcja podcałkowa jest określona przez pochodne rzędu 1, 2, 3 parametryzacji  $\mathbf{p}$ .

Ponieważ funkcjonal  $\Psi$  zależy tylko od kształtu powierzchni  $\mathcal{M}$ , a poszukiwana jest parametryzacja (jedna z nieskończenie wielu), zadanie trzeba ujednoznaczyć. Można to zrobić przez dodanie kary za zafalowania linii stałego parametru. Zatem, będzie minimalizowana funkcja

$$F(\mathbf{p}) = S(\mathbf{p}) + cQ(\mathbf{p}),$$
$$Q(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n_E} \int_{E_i} \|P\nabla\Delta\mathbf{p}\|_F^2 d\mathcal{D}.$$

$E_i$  to kwadraty rozmaitości  $\mathcal{D}$ . Przekształcenie  $P$  jest rzutem ortogonalnym na płaszczyznę styczną do powierzchni  $\mathcal{M}$  w danym punkcie. Macierz  $P\nabla\Delta\mathbf{p}$  ma wymiary  $3 \times 2$ . Ponadto przyjmuję

$$c = C \frac{n_E^2}{\text{diam}(\mathcal{M})^4}.$$

W tym wzorze stała  $C > 0$  jest dobrana doświadczalnie,  $\text{diam}(\mathcal{M})^4$  jest średnicą zbioru ustalonych wierzchołków siatki.



# Zadanie dyskretne i jego numeryczne rozwiązywanie

Należy znaleźć minimum funkcji

$$\tilde{F}(\dots, x_j, y_j, z_j, \dots) \stackrel{\text{def}}{=} F\left(\sum_{j=1}^{m+m'} \mathbf{p}_j \phi_j\right),$$

której argumenty są współrzędnymi *nieustalonych* wierzchołków siatki,  $\mathbf{p}_j = (x_j, y_j, z_j)$ . Ustalone muszą być wierzchołki na brzegu siatki i w odległości 1 i 2 od brzegu, można też ustalić wierzchołki dodatkowe.

Poszukiwany jest punkt  $\mathbf{x}^* = (\dots, x_j, y_j, z_j, \dots) \in \mathbb{R}^{3m}$  będący miejscem zerowym gradientu funkcji  $\tilde{F}$ , w którym hesjan tej funkcji jest macierzą dodatnio określoną. Wykonuje się to iteracyjnie, konstruuując ciąg wektorów  $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots$ , który powinien zbiegać do  $\mathbf{x}^*$ .

Całka w definicji funkcji  $\tilde{F}$  może (musi) być zastąpiona przez kwadraturę. Można wyprowadzić wzory opisujące pochodne pierwszego i drugiego rzędu tak zmienionej funkcji i zastosować metodę Newtona:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}, \quad \text{dla } H^{(k)} \boldsymbol{\delta}^{(k)} = -\mathbf{g}^{(k)},$$

gdzie  $\mathbf{g}^{(k)}$  i  $H^{(k)}$  to gradient i hesjan funkcji  $\tilde{F}$  w punkcie  $\mathbf{x}^{(k)}$ .

Ale znalezienie dobrego punktu startowego dla metody Newtona (położeń początkowych wierzchołków siatki) jest trudne.

Metodą skuteczną okazała się minimalizacja wzdłuż trajektorii Levenberga–Marquardta:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}, \quad \text{dla } (H^{(k)} + \nu I)\boldsymbol{\delta}^{(k)} = -\mathbf{g}^{(k)},$$

po dobraniu takiego  $\nu \in [-\lambda_{\min}^{(k)}, +\infty)$ , aby funkcja

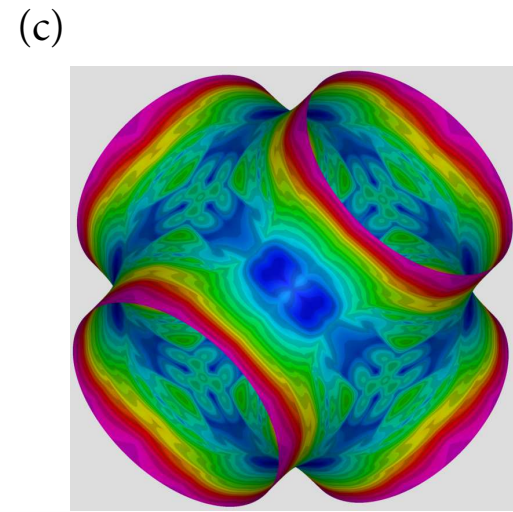
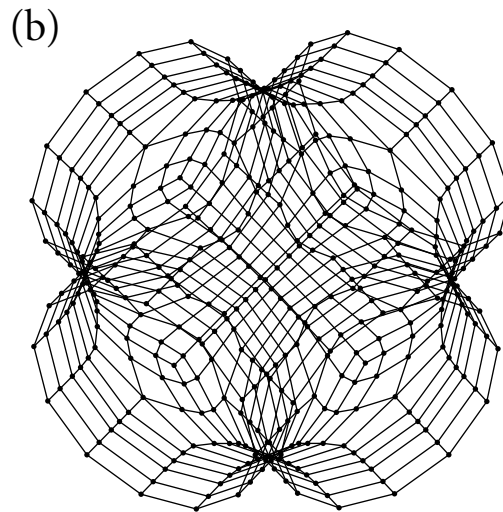
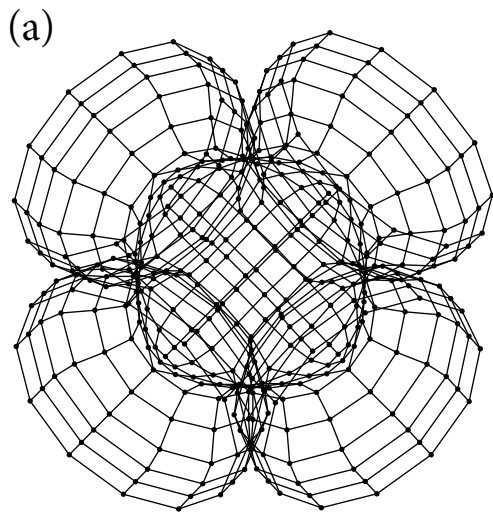
$$f(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}(\mathbf{x}^{(k)} - (H^{(k)} + \nu I)^{-1}\mathbf{g}^{(k)})$$

osiągała wartość minimalną. Dla  $\nu > -\lambda_{\min}^{(k)}$  macierz  $(H^{(k)} + \nu I)$  jest dodatnio określona. Jeśli  $\nu \rightarrow \infty$ , to wektor  $(H^{(k)} + \nu I)^{-1}\mathbf{g}^{(k)}$  dąży do zera, a jego kierunek dąży do kierunku najszybszego spadku funkcji  $\tilde{F}$ .

Zwykle wystarczy kilka–kilkanaście iteracji tej metody, aby otrzymać punkt  $\mathbf{x}^{(k)}$  w kuli zbieżności metody Newtona i odtąd można przyjmować  $\nu = 0$ .

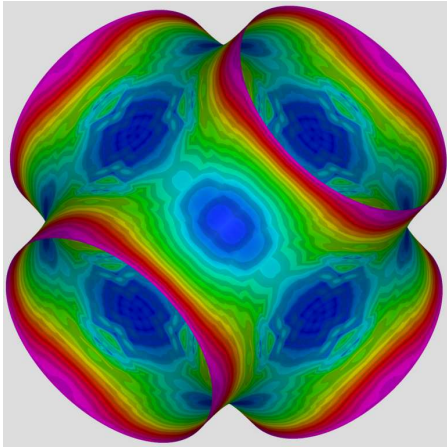
Opracowałem kilka algorytmów, stosowanych do zadań o różnych wielkościach (od kilkudziesięciu do ponad 120000 wierzchołków siatki). Algorytmy dla zadań dużych są oparte na dekompozycji dziedziny.

**Przykład:** Siatka z 406 wierzchołkami, w tym 262 nieustalone. Trzeba było wykonać 14 iteracji metody Levenberga–Marquadrta, a potem 10 iteracji metody Newtona (całość zajęła 140s na procesorze Intel Core 2, 2.4GHz).

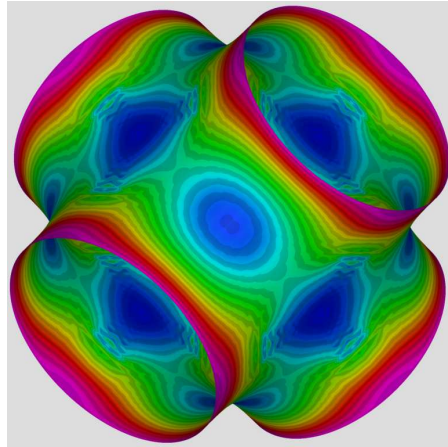


Po zagęszczeniu siatki z poprzedniego przykładu powstała siatka (a) z 1486 wierzchołkami, w tym 1198, których położenie można zoptymalizować.

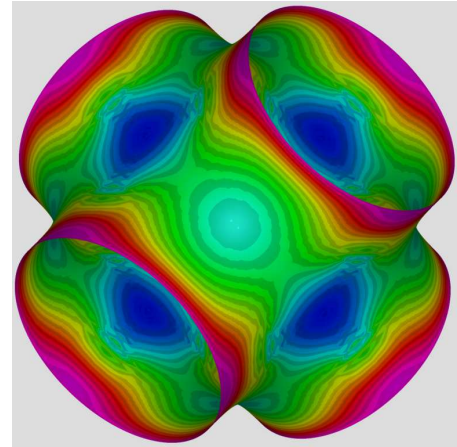
(a)



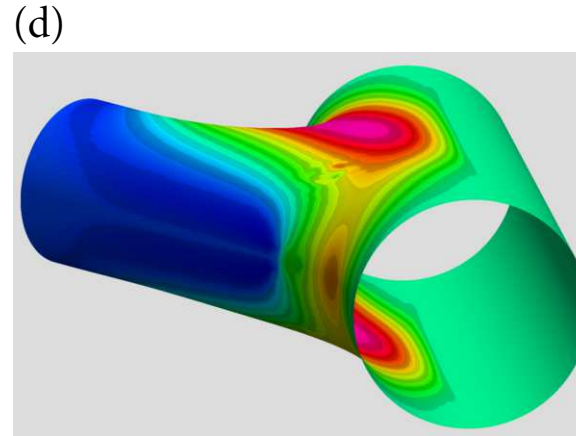
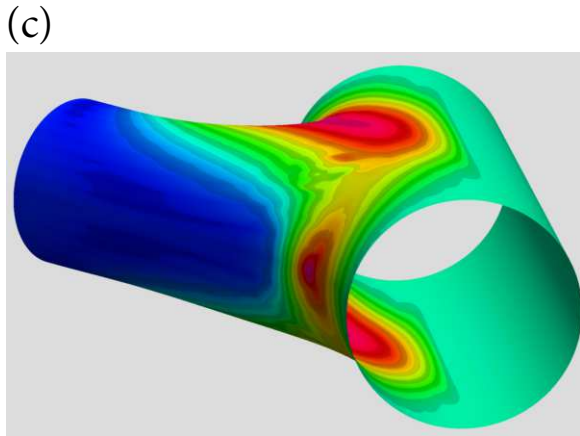
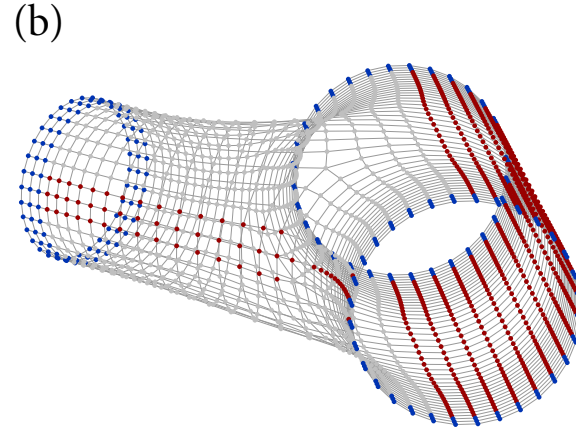
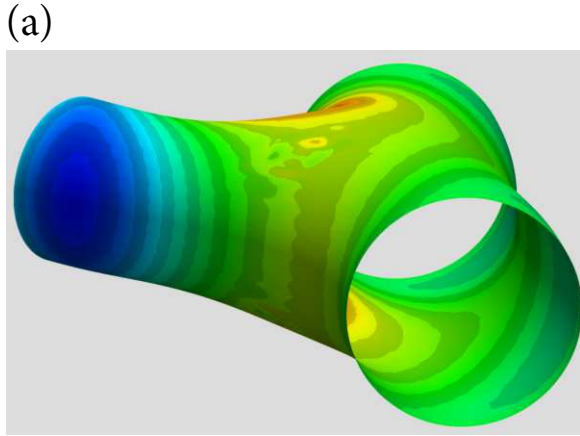
(b)



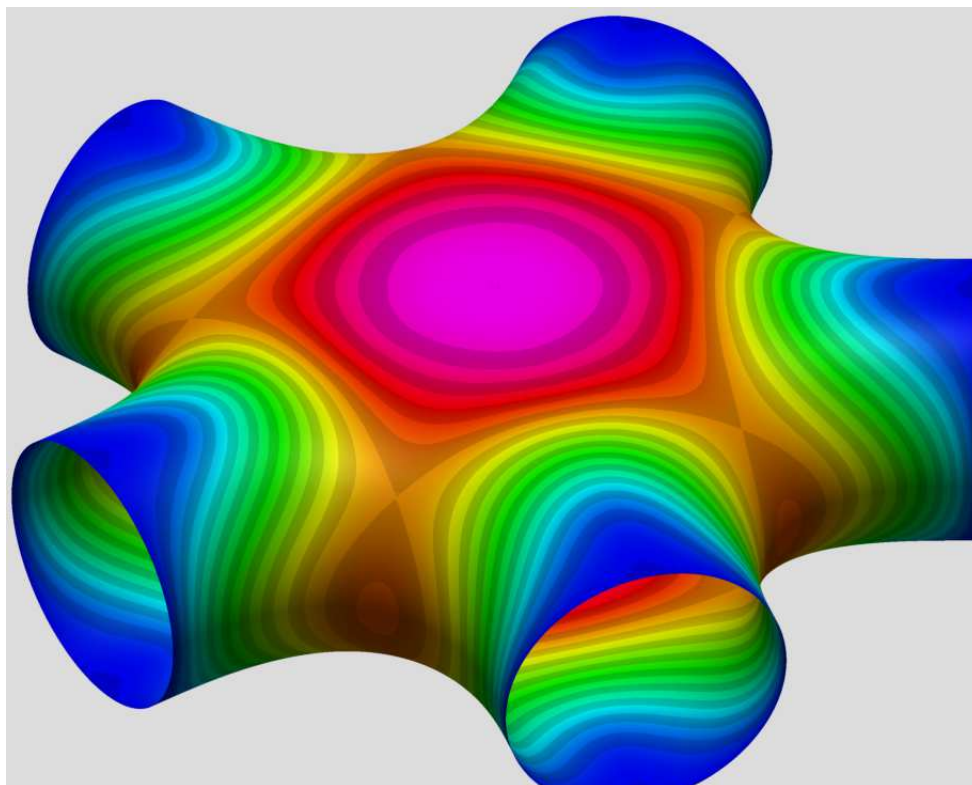
(c)



Tu wystarczyła minimalizacja wzdłuż tylko jednej trajektorii Levenberga–Marquardta, a potem 12 iteracji metody Newtona (tylko 4 razy był obliczany hesjan). Obliczenie zajęło 152s. Siatki powierzchni (b) i (c) mają 5662 wierzchołki, z których 5086 nie wyznacza warunków brzegowych. Powierzchnia (c) powstała w wyniku regularyzacji zadania minimalizacji funkcjonału  $\Psi$  dokonanej nieco innym sposobem.



Siatki (a), (b), (c) mają 1871 wierzchołków, z których 288 wyznacza warunki brzegowe. Rysunek uwidoczni dodatkowo 689 wierzchołków, których położenia zostały ustalone. Siatka powierzchni (d) ma 7199 wierzchołków, w tym 3241 ustalonych.



Siatka powierzchni na rysunku ma 124797 wierzchołków, z których 120015 było poddanych optymalizacji. Tu została użyta metoda dekompozycji dziedziny, całość obliczeń trwała 1h 46min.

## Konstrukcja przestrzeni funkcji dla elementów specjalnych

Niech  $B, C, D \subset \mathbb{R}^2$  będą obszarami otwartymi. Przyjmujemy lokalne układy współrzędnych  $(s, t)$  w  $B$  i  $(u, v)$  w  $D$ . Niech

$$\Phi = \{ (s, t) : 0 < s < 1, t = t_0 \} \subset B,$$

$$\Psi = \{ (u, v) : 0 < u < 1, v = v_0 \} \subset D.$$

Niech  $\beta: B \rightarrow C$  i  $\delta: D \rightarrow C$  będą dyfeomorfizmami klasy  $C^2$ , takimi że

$$\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \beta(\Phi) = \delta(\Psi), \text{ tzn. } \beta(s, t_0) = \delta(u, v_0) \text{ dla } s = u \in [0, 1].$$



**Twierdzenie 1** Niech  $\phi: C \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją klasy  $C^2$  i niech  $\xi = \phi \circ \beta$ .  
 Niech  $\mu^*: D \rightarrow \mathbb{R}$  będzie klasy  $C^2$  i niech dla każdego  $s = u \in (0, 1)$

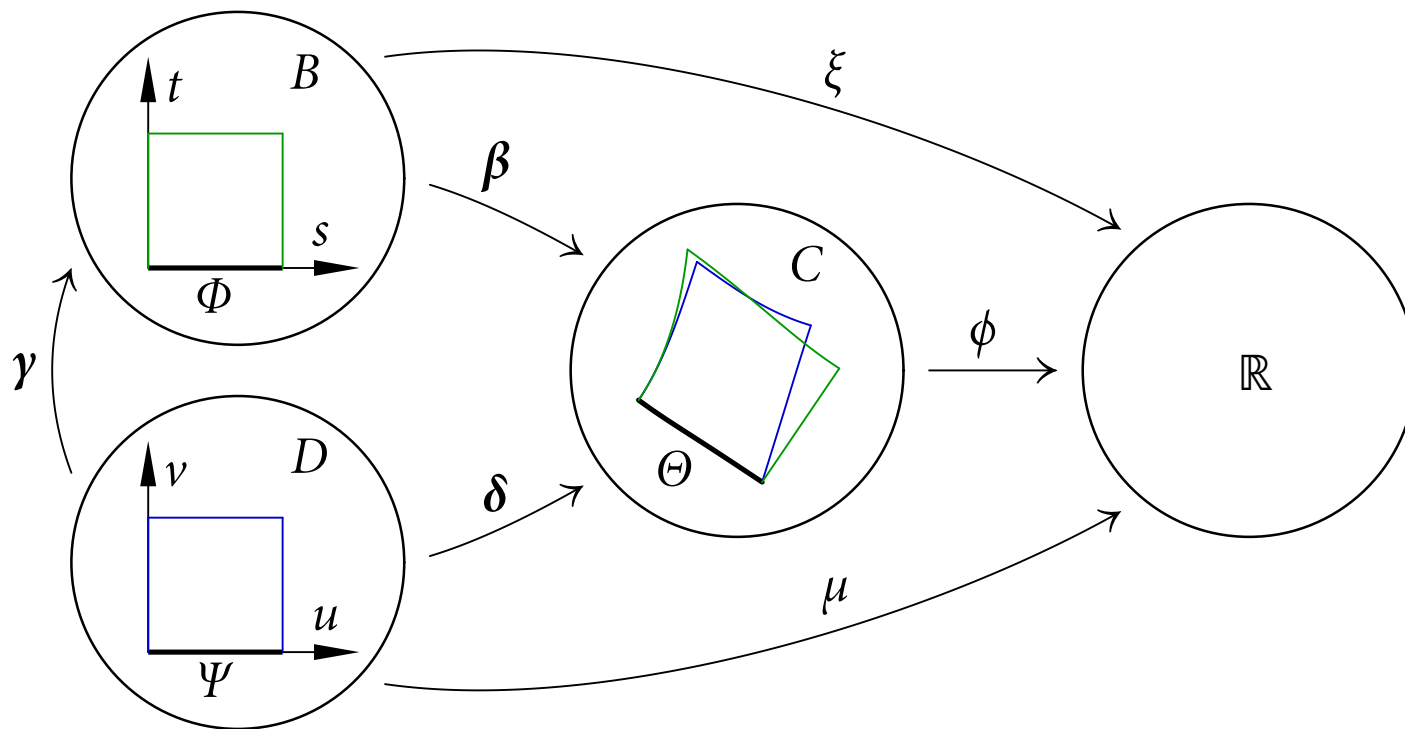
$$\begin{aligned}\delta(u, v_0) &= \beta(s, t_0), \\ \mu^*(u, v_0) &= \xi(s, t_0).\end{aligned}$$

Przypuśćmy, że istnieją funkcje  $s_1, t_1, s_2, t_2$  klasy  $C^2$ , takie że

$$\begin{aligned}\delta_v|_{v=v_0} &= s_1\beta_s|_{t=t_0} + t_1\beta_t|_{t=t_0}, \\ \delta_{vv}|_{v=v_0} &= s_2\beta_{ss}|_{t=t_0} + t_2\beta_{tt}|_{t=t_0} + s_1^2\beta_{ss}|_{t=t_0} + 2s_1t_1\beta_{st}|_{t=t_0} + t_1^2\beta_{tt}|_{t=t_0},\end{aligned}\tag{*}$$

$$\begin{aligned}\mu_v^*|_{v=v_0} &= s_1\xi_s|_{t=t_0} + t_1\xi_t|_{t=t_0}, \\ \mu_{vv}^*|_{v=v_0} &= s_2\xi_{ss}|_{t=t_0} + t_2\xi_{tt}|_{t=t_0} + s_1^2\xi_{ss}|_{t=t_0} + 2s_1t_1\xi_{st}|_{t=t_0} + t_1^2\xi_{tt}|_{t=t_0}.\end{aligned}\tag{**}$$

Jeśli krzywa  $\Theta$  dzieli obszar  $C$  na podobszary  $C_1$  i  $C_2$ , to funkcja, której obcięciem do  $C_1$  jest  $\phi$  a obcięciem do  $C_2$  jest  $\phi^* = \mu^* \circ \delta^{-1}$ , jest klasy  $C^2(C)$ .



Dowód polega na zbadaniu diagramu przemiennego pokazanego wyżej: Przekształcenia  $\beta$  i  $\delta$  są bijekcjami, zatem istnieje bijekcja  $\gamma = \beta^{-1} \circ \delta$ . Dla  $\xi = \phi \circ \beta$  i  $\mu = \phi \circ \delta$  jest  $\mu = \phi \circ \beta \circ \gamma = \xi \circ \gamma$ .

Mamy zatem  $\delta = \beta \circ \gamma$  oraz  $\mu = \xi \circ \gamma$ . Dla  $\gamma(u, v) = (s(u, v), t(u, v))$ , przez różniczkowanie funkcji złożonych otrzymujemy równania (\*) i (\*\*), w których funkcje  $s_1, t_1, s_2, t_2$  opisują obciążenia do odcinka  $\Psi$  pochodnych rzędu 1 i 2 funkcji  $s$  i  $t$  względem  $v$ . Jeśli te równania są spełnione, to funkcje  $\mu$  i  $\mu^*$  mają te same wartości i pochodne rzędu 1 i 2 w każdym punkcie odcinka  $\Psi$  i wtedy funkcje  $\phi$  i  $\phi^*$  mają te same wartości i pochodne w każdym punkcie krzywej  $\Theta$ .  $\square$

Najważniejszym wnioskiem z twierdzenia jest to, że w równaniach (\*) i (\*\*) występują *te same* funkcje  $s_1, t_1, s_2, t_2$ .

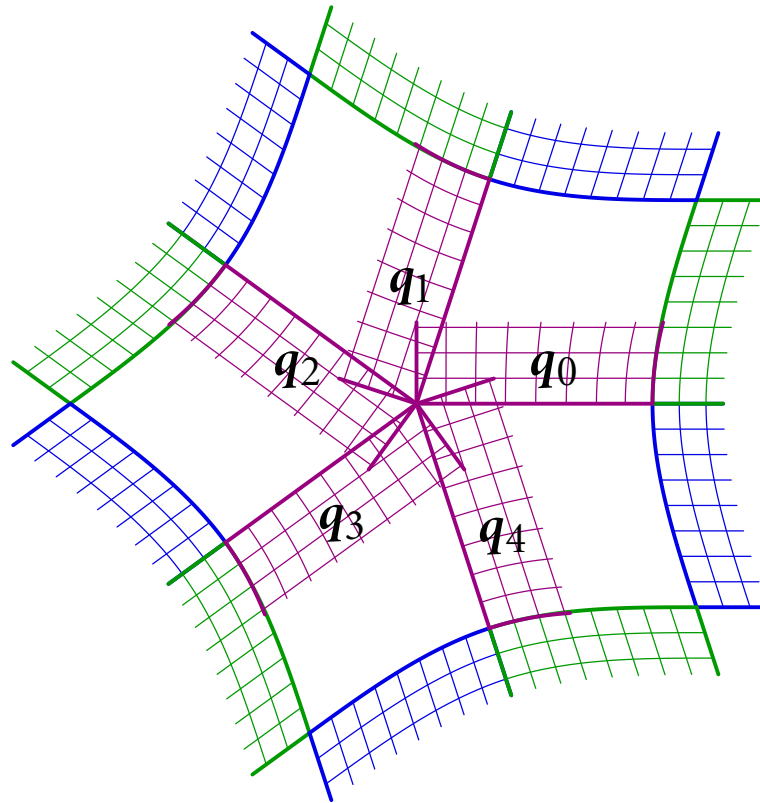
Obszar  $\Omega$  jest wielokątem krzywoliniowym, który zostaje podzielony na  $k$  czworokątów krzywoliniowych,  $\Omega_0, \dots, \Omega_{k-1}$ . Każdy z tych czworokątów jest obrazem jednego kwadratu specjalnego w przekształceniu  $\delta_i$ , które nazywam **płatem dziedziny**.

Układ równań (\*) i (\*\*\*) trzeba napisać dla każdego boku tych czworokątów, wprowadzając odpowiedni komplet funkcji  $s_1, t_1, s_2, t_2$  (i pozostałych przekształceń z diagramu). Funkcje te można skonstruować w obrębie przekształceń obszarów płaskich ( $B, C, D$  na diagramie), a potem użyć w konstrukcji wszystkich skalarnych funkcji bazowych określonych w  $A$ .

Przekształcenie  $\beta$  w diagramie to tzw. **pomocniczy płat dziedziny**.

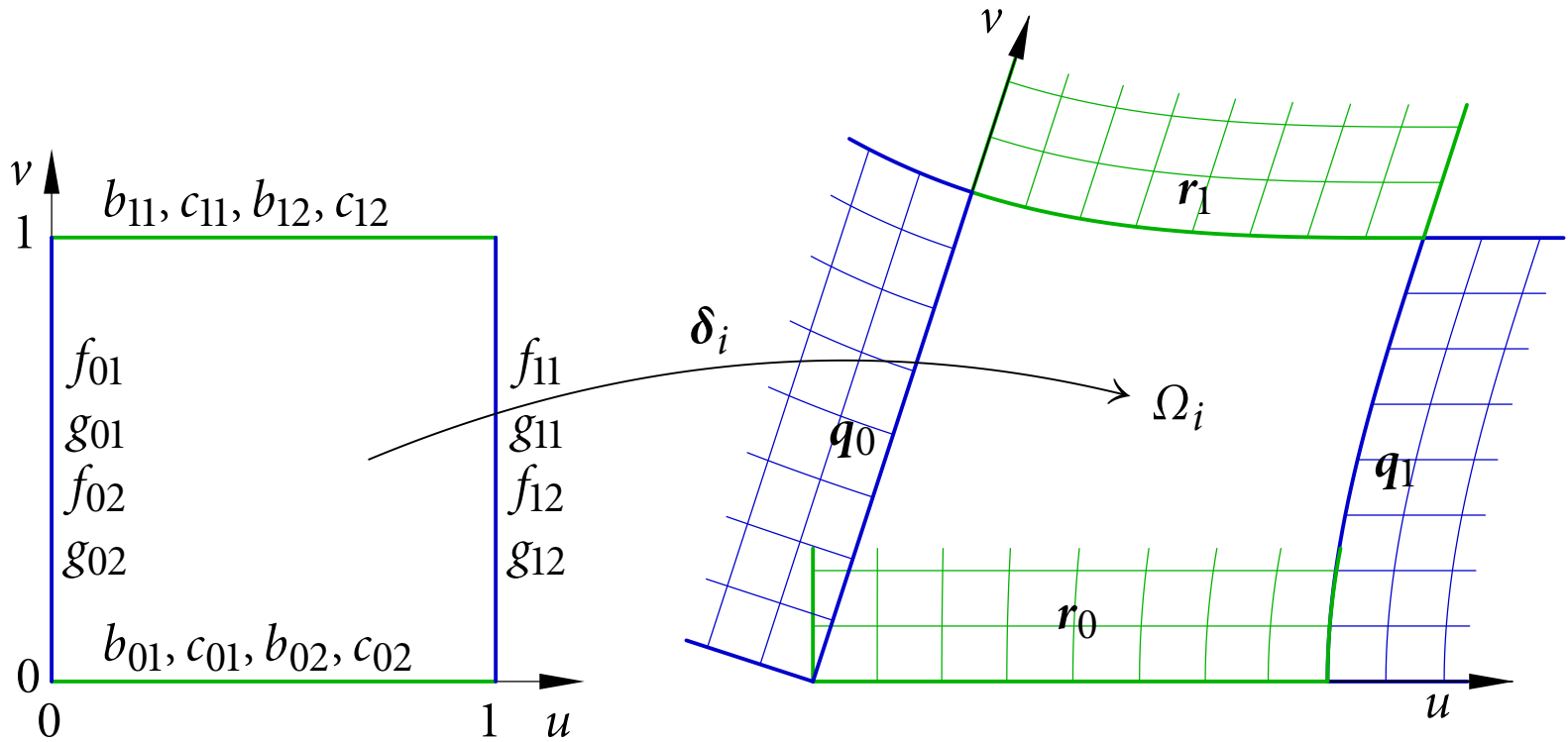
Dla krzywej leżącej na brzegu obszaru  $\Omega$  jest to bikubiczny płat określony przez odpowiednie wierzchołki siatki Sabina.

Dla krzywej wspólnej podobszarów  $\Omega_i$  i  $\Omega_{i+1}$  pomocniczy płat dziedziny konstruuje się ustalając reprezentację Béziera tej krzywej i pochodnych w kierunku poprzecznym rzędu 1 i 2. Aby umożliwić spełnienie **warunków zgodności**, przyjąłem, że to są krzywe stopni 7, 6 i 5.



Pochodne pomocniczych pól dziedzin rzędu 2, 3, 4 w punkcie centralnym są równe  $\mathbf{0}$ .

Kolejnym etapem jest konstrukcja funkcji połączenia, które odpowiadają funkcjom  $s_1, t_1, s_2, t_2$ . Ponieważ taki zestaw jest potrzebny dla każdego boku kwadratu specjalnego, tu są przyjęte nowe oznaczenia.



Wartości i pochodne funkcji połączenia muszą spełniać równania opisujące warunki zgodności:

**pochodnych pierwszego rzędu:**

$$\begin{aligned}\bar{q}_v &= \underline{b}_1 \bar{r}_u + \underline{c}_1 \bar{r}_s, \\ \bar{r}_u &= \underline{f}_1 \bar{q}_v + \underline{g}_1 \bar{q}_t,\end{aligned}$$

**pochodnych mieszanych drugiego rzędu:**

$$\underline{f}'_1 \bar{q}_v + \underline{g}'_1 \bar{q}_t + \underline{f}_1 \bar{q}_{vv} + \underline{g}_1 \bar{q}_{vt} = \underline{b}'_1 \bar{r}_u + \underline{c}'_1 \bar{r}_s + \underline{b}_1 \bar{r}_{uu} + \underline{c}_1 \bar{r}_{us},$$



pochodnych drugiego rzędu:

$$\begin{aligned}\bar{q}_{vv} &= \underline{b}_2 \bar{r}_u + \underline{c}_2 \bar{r}_s + \underline{b}_1^2 \bar{r}_{uu} + 2\underline{b}_1 \underline{c}_1 \bar{r}_{us} + \underline{c}_1^2 \bar{r}_{ss}, \\ \bar{r}_{uu} &= \underline{f}_2 \bar{q}_v + \underline{g}_2 \bar{q}_t + \underline{f}_1^2 \bar{q}_{vv} + 2\underline{f}_1 \underline{g}_1 \bar{q}_{vt} + \underline{g}_1^2 \bar{q}_{tt},\end{aligned}$$

pochodnych mieszanych trzeciego rzędu:

$$\begin{aligned}\underline{f}_1'' \bar{q}_v + \underline{g}_1'' \bar{q}_t + 2\underline{f}_1' \bar{q}_{vv} + 2\underline{g}_1' \bar{q}_{vt} + \underline{f}_1 \bar{q}_{vvv} + \underline{g}_1 \bar{q}_{vvt} = \\ \underline{b}_2' \bar{r}_u + \underline{c}_2' \bar{r}_s + (2\underline{b}_1 \underline{b}_1' + \underline{b}_2) \bar{r}_{uu} + (2\underline{b}_1' \underline{c}_1 + 2\underline{b}_1 \underline{c}_1' + \underline{c}_2) \bar{r}_{us} + \\ 2\underline{c}_1 \underline{c}_1' \bar{r}_{ss} + \underline{b}_1^2 \bar{r}_{uuu} + 2\underline{b}_1 \underline{c}_1 \bar{r}_{uus} + \underline{c}_1^2 \bar{r}_{uss}, \\ \underline{b}_1'' \bar{r}_u + \underline{c}_1'' \bar{r}_s + 2\underline{b}_1' \bar{r}_{uu} + 2\underline{c}_1' \bar{r}_{us} + \underline{b}_1 \bar{r}_{uuu} + \underline{c}_1 \bar{r}_{uus} = \\ \underline{f}_2' \bar{q}_v + \underline{g}_2' \bar{q}_t + (2\underline{f}_1 \underline{f}_1' + \underline{f}_2) \bar{q}_{vv} + (2\underline{f}_1' \underline{g}_1 + 2\underline{f}_1 \underline{g}_1' + \underline{g}_2) \bar{q}_{vt} + \\ 2\underline{g}_1 \underline{g}_1' \bar{q}_{tt} + \underline{f}_1^2 \bar{q}_{vvv} + 2\underline{f}_1 \underline{g}_1 \bar{q}_{vvt} + \underline{g}_1^2 \bar{q}_{vtt};\end{aligned}$$

pochodnych mieszanych czwartego rzędu:

$$\begin{aligned}
 & \underline{f}_2'' \underline{\bar{q}}_v + \underline{g}_2'' \underline{\bar{q}}_t + 2(\underline{f}_1 \underline{f}_1'' + \underline{f}_1'^2 + \underline{f}_2') \underline{\bar{q}}_{vv} + \\
 & 2(\underline{f}_1'' \underline{g}_1 + 2\underline{f}_1' \underline{g}_1' + \underline{f}_1 \underline{g}_1'' + \underline{g}_2') \underline{\bar{q}}_{vt} + 2(\underline{g}_1 \underline{g}_1'' + \underline{g}_1'^2) \underline{\bar{q}}_{tt} + \\
 & (4\underline{f}_1 \underline{f}_1' + \underline{f}_2) \underline{\bar{q}}_{vvv} + (4\underline{f}_1' \underline{g}_1 + 4\underline{f}_1 \underline{g}_1' + \underline{g}_2) \underline{\bar{q}}_{vvt} + 4\underline{g}_1 \underline{g}_1' \underline{\bar{q}}_{vtt} + \\
 & \underline{f}_1^2 \underline{\bar{q}}_{vvvv} + 2\underline{f}_1 \underline{g}_1 \underline{\bar{q}}_{vvvt} + \underline{g}_1^2 \underline{\bar{q}}_{vvt} = \\
 & \underline{b}_2'' \underline{\bar{r}}_u + \underline{c}_2'' \underline{\bar{r}}_s + 2(\underline{b}_1 \underline{b}_1'' + \underline{b}_1'^2 + \underline{b}_2') \underline{\bar{r}}_{uu} + \\
 & 2(\underline{b}_1'' \underline{c}_1 + 2\underline{b}_1' \underline{c}_1' + \underline{b}_1 \underline{c}_1'' + \underline{c}_2') \underline{\bar{r}}_{us} + 2(\underline{c}_1 \underline{c}_1'' + \underline{c}_1'^2) \underline{\bar{r}}_{ss} + \\
 & (4\underline{b}_1 \underline{b}_1' + \underline{b}_2) \underline{\bar{r}}_{uuu} + (4\underline{b}_1' \underline{c}_1 + 4\underline{b}_1 \underline{c}_1' + \underline{c}_2) \underline{\bar{r}}_{uus} + 4\underline{c}_1 \underline{c}_1' \underline{\bar{r}}_{uss} + \\
 & \underline{b}_1^2 \underline{\bar{r}}_{uuuu} + 2\underline{b}_1 \underline{c}_1 \underline{\bar{r}}_{uuus} + \underline{c}_1^2 \underline{\bar{r}}_{uuss}.
 \end{aligned}$$

Pomocnicze płyty dziedziny są skonstruowane tak, aby na brzegu  $\Omega$  było  $b_1 = f_1 = b_2 = c_2 = f_2 = g_2 = 0$ . Powoduje to wyeliminowanie z warunków zgodności pochodnych rzędu 3 i 4 krzywych dzielących obszar  $\Omega$  na podobszary.

Kolejno rozwiązując równania opisujące warunki zgodności można obliczyć wartości i pochodne rzędu 1 i 2 funkcji połączenia w punktach 0 i 1. Funkcje te są konstruowane przez rozwiązanie zadań interpolacyjnych Hermite'a. Stopnie swobody są wykorzystywane do otrzymania funkcji możliwie niskich stopni.

Krzywe opisujące brzegi  $\Omega_i$  i pochodne rzędu 1 i 2 pomocniczych płatów dziedziny, a także funkcje połączenia podstawiamy do równań ciągłości geometrycznej

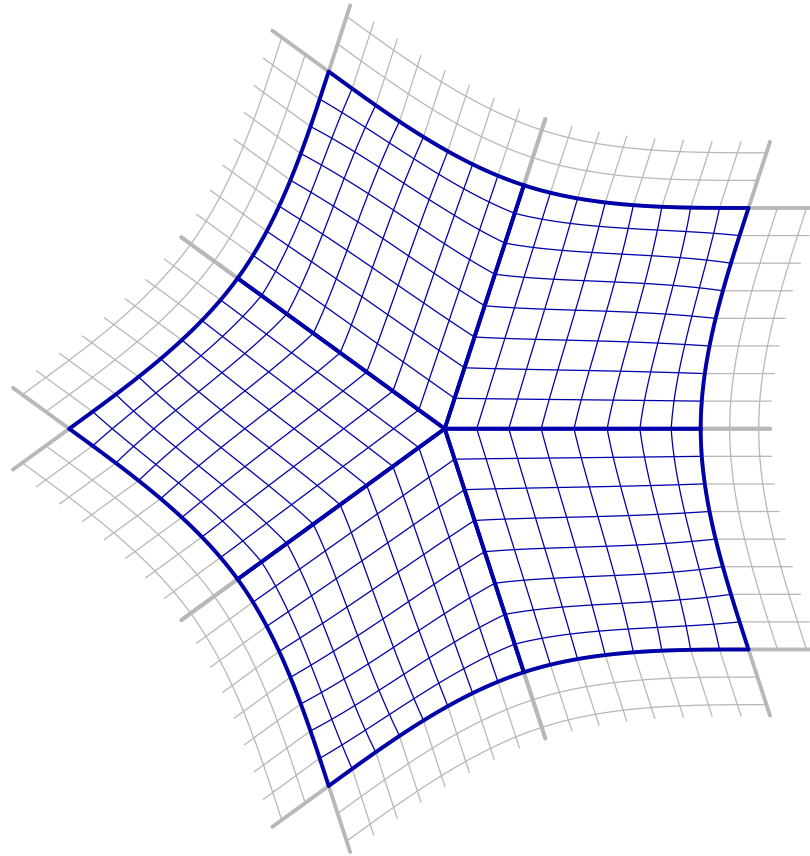
$$\underline{d}^* = \bar{b},$$

$$\underline{d}_{\nu}^* = s_1 \bar{b}_s + t_1 \bar{b}_t,$$

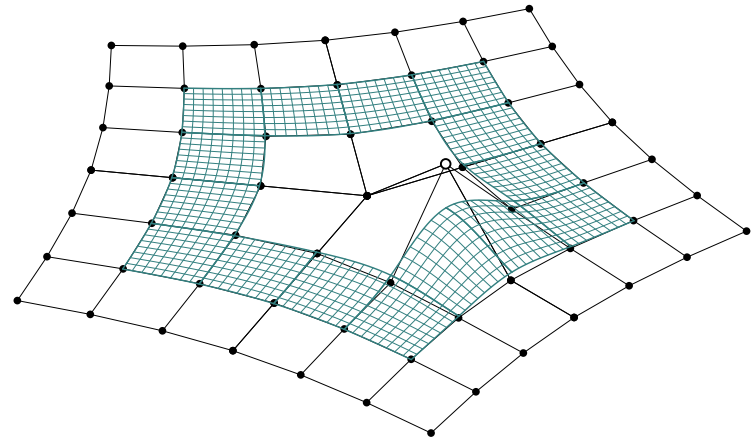
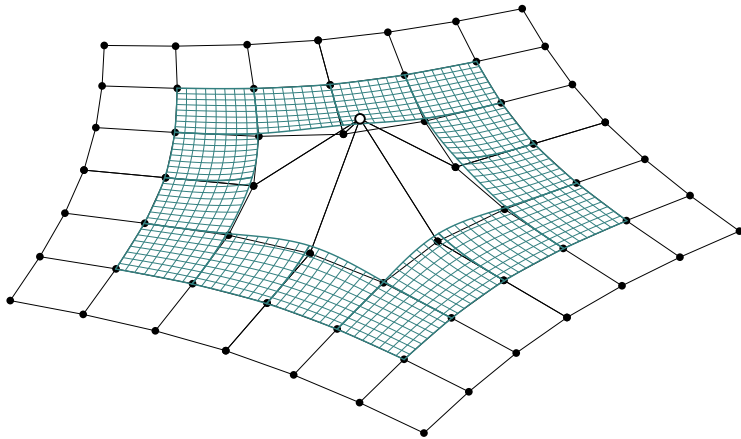
$$\underline{d}_{\nu\nu}^* = s_2 \bar{b}_s + t_2 \bar{b}_t + s_1^2 \bar{b}_{ss} + 2s_1 t_1 \bar{b}_{st} + t_1^2 \bar{b}_{tt},$$

z których otrzymujemy pochodne rzędu 1 i 2 płatów dziedziny  $d$  (czyli  $\delta_i$ ).

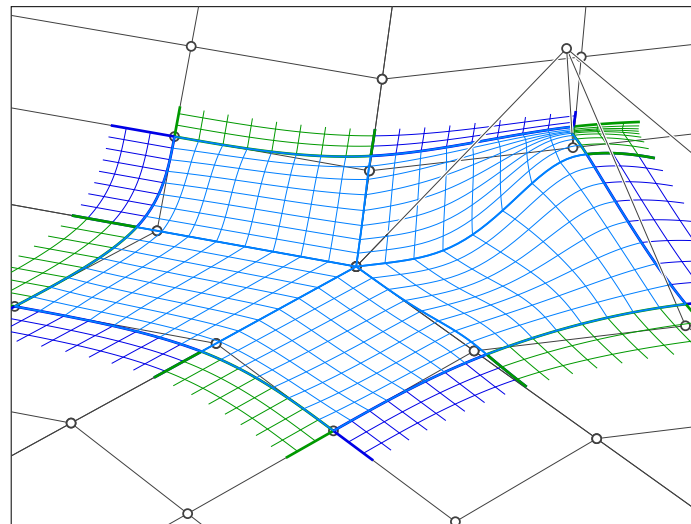
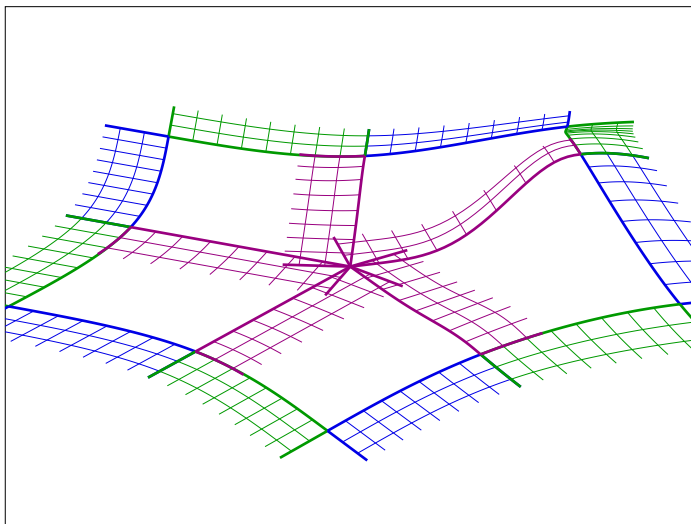
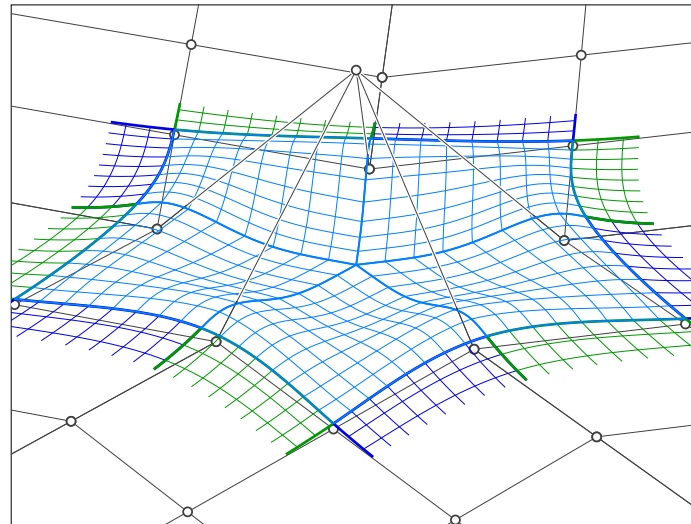
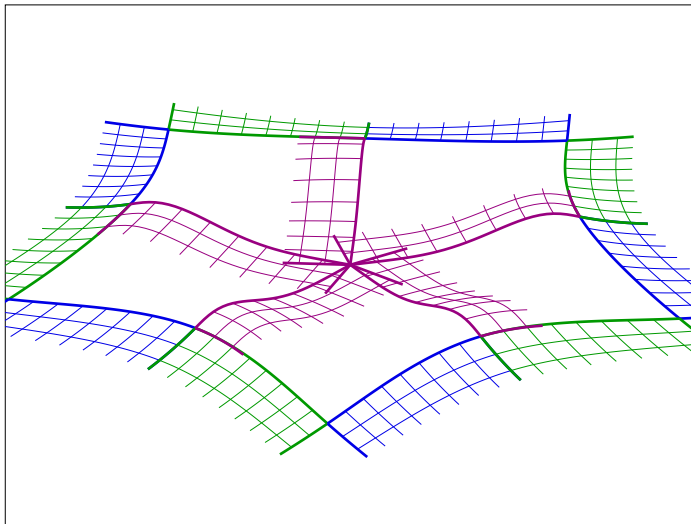
Płaty dziedziny są otrzymane jako płaty Coonsa; udaje się otrzymać w ten sposób płaty stopnia  $(9, 9)$ .



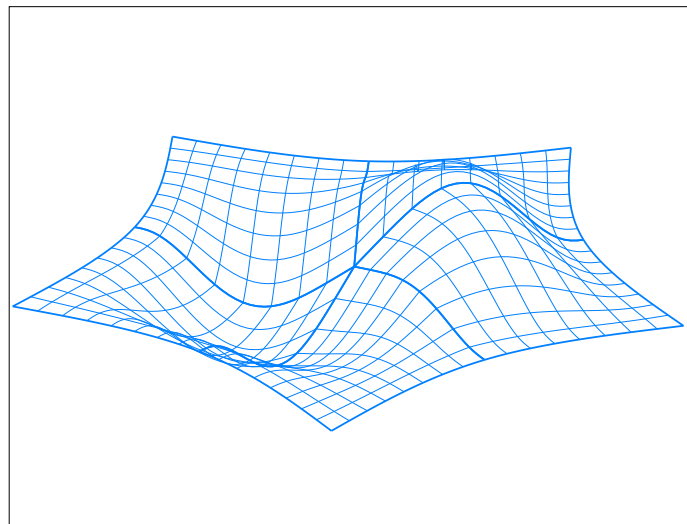
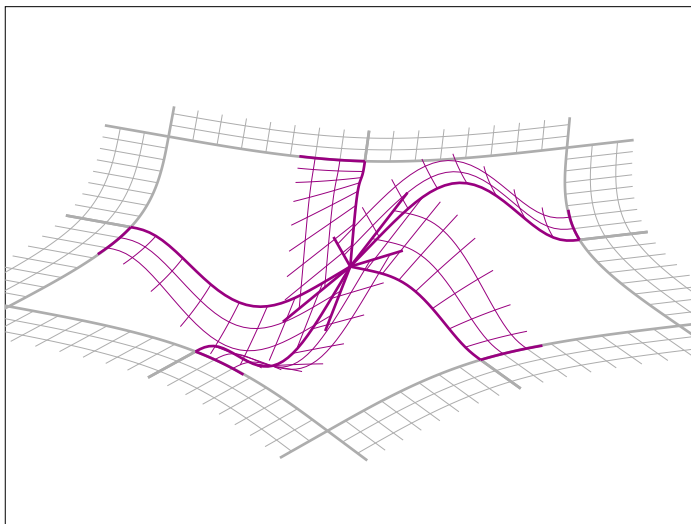
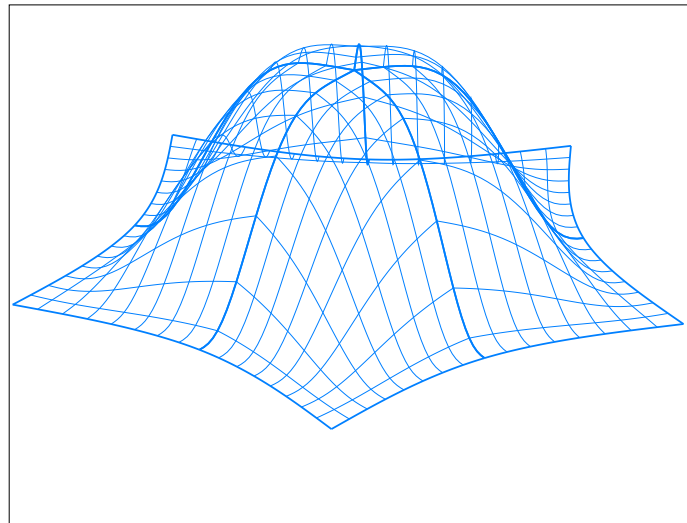
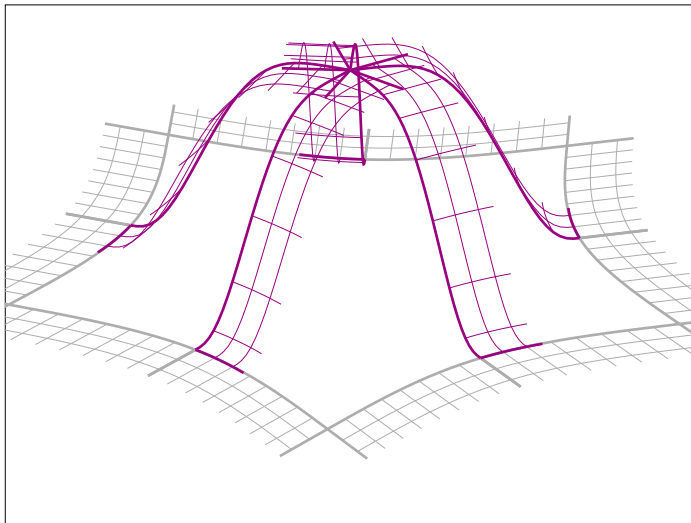
Do skonstruowania funkcji bazowych potrzebne są funkcje połączenia (które już mamy) i  **pomocnicze płaty funkcji bazowych**  odpowiadające funkcji  $\xi$  na diagramie — po jednej dla każdej krzywej brzegowej podobszarów  $\Omega_i$ . Dla krzywych brzegowych obszaru  $\Omega$  pomocnicze płaty funkcji bazowych są wielomianami stopnia  $(3, 3)$  określonymi przez siatkę Sabina z wszystkimi wierzchołkami w płaszczyźnie  $xy$  oprócz jednego, który ma współrzędną  $z = 1$ .



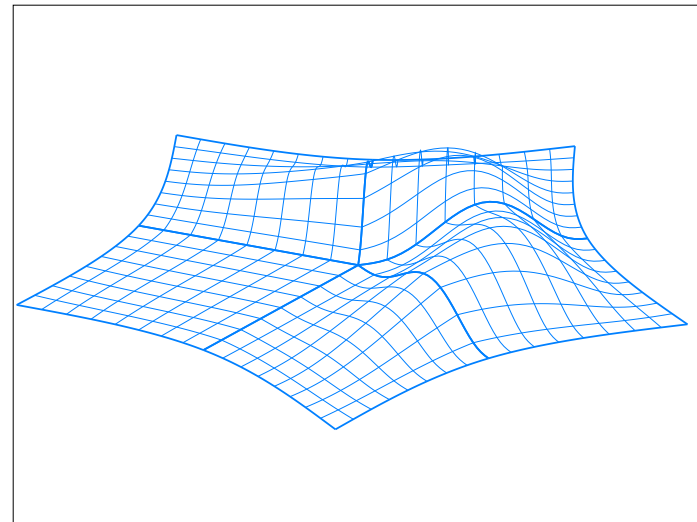
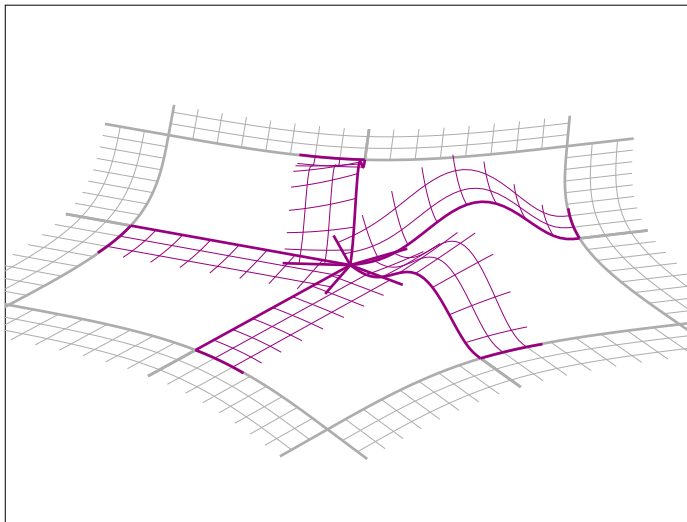
Dla tych funkcji przyjmujemy płaty pomocnicze, które w punkcie centralnym mają wartości i pochodne równe 0.



Potrzebujemy też funkcji, które znikają na brzegu  $\Omega$ , ale wewnątrz tego obszaru mają wartości niezerowe.

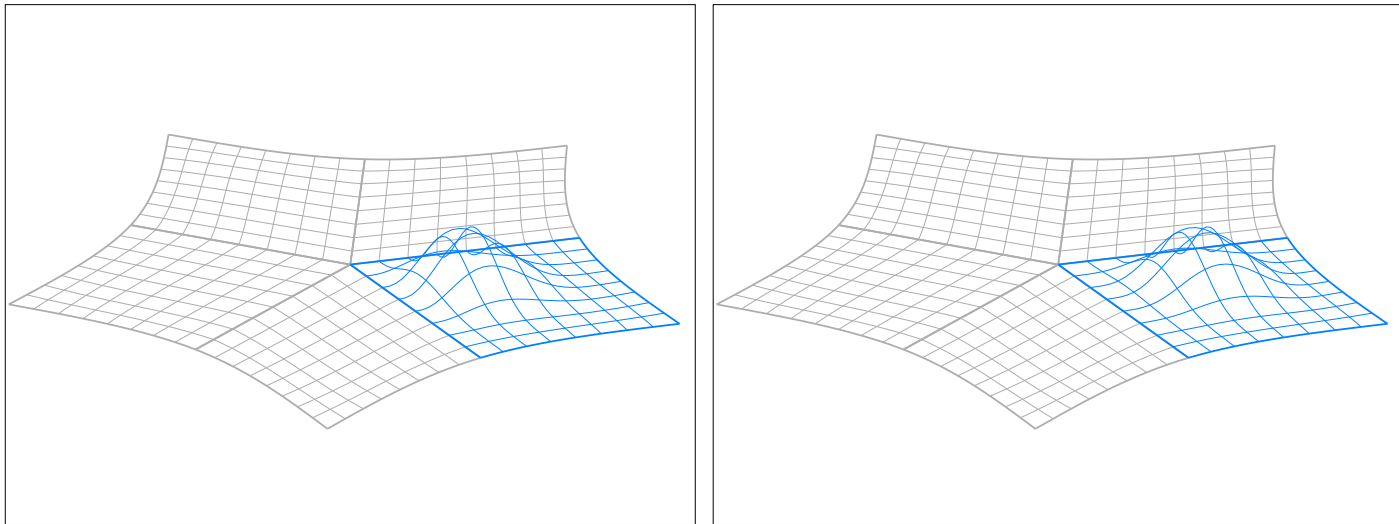


Wartości funkcji i pochodne pomocniczych pól funkcji bazowych w punkcie centralnym zadajemy na podstawie liniowo niezależnych wielomianów dwóch zmiennych. Dodatkowo funkcje można otrzymać na podstawie funkcji sklepanych klasy  $C^2$ , stopnia 3 i 4, określonych nad **podziałem kąta pełnego** przez półproste styczne do krzywych dzielących obszar  $\Omega$ .





Płaty funkcji bazowych są określone jako płaty Coonsa; to są płaty wielomianowe stopnia  $(9, 9)$ . Dodatkowo można skonstruować funkcje różne od 0 tylko w jednym podobszarze  $\Omega_i$ ; dla obszaru  $k$ -kątnego jest  $16k$  takich niezależnych liniowo funkcji klasy  $C^2$ .



Funkcje równe 0 na brzegu obszaru  $\Omega$  rozpinają przestrzeń liniową oznaczoną  $V_0$ . Funkcje różne od 0 na brzegu  $\Omega$  rozpinają przestrzeń oznaczoną  $V_1$ . To są podprzestrzenie liniowe przestrzeni Sobolewa odpowiednio  $H_0^3(\Omega)$  i  $H^3(\Omega)$ . Numeryczne rozwiązanie równania trójharmonicznego,  $-\Delta^3 p = 0$ , wyznacza element tej przestrzeni, który minimalizuje funkcjonal

$$\Phi(f) = \int_{\Omega} \|\nabla \Delta f\|_2^2 d\Omega$$

w zbiorze funkcji spełniających warunki brzegowe

$$\begin{cases} p(x, y) = \hat{s}(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Gamma, \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = \frac{\partial \hat{s}}{\partial \mathbf{n}}(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Gamma, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial \mathbf{n}^2}(x, y) = \frac{\partial^2 \hat{s}}{\partial \mathbf{n}^2}(x, y) & \text{dla } (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

określony przez funkcję  $\hat{s}$  określoną w  $A \setminus \Omega$ .

Z funkcjonałem  $\Phi$  jest związana symetryczna forma dwuliniowa

$$\varphi(f, g) = \int_{\Omega} \langle \nabla \Delta f, \nabla \Delta g \rangle d\Omega.$$

Możemy zapisać funkcję  $p_i$  w postaci

$$p_i = \hat{\phi}_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi_j,$$

gdzie  $\phi_i$  to funkcje bazowe znikające na brzegu obszaru  $\Omega$ ,  $\hat{\phi}_j$  to funkcja związana z wierzchołkiem siatki Sabina (takich funkcji jest  $6k + 1$ ), to współczynniki  $a_{ji}$  funkcji  $p_i$ , która minimalizuje funkcjonał  $\Phi$ , spełniają układ równań liniowych

$$\sum_{j=1}^n \varphi(\phi_j, \phi_l) a_j = -\delta_{il} \varphi(\hat{\phi}_i, \phi_l), \quad l = 1, \dots, n.$$

*Dziękuję*